Н. К. Э.
УПРАВЛЕНИЕ ВОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И МЕЛИОРАЦИЙ.

ОПЫТНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ.

Выпуск 4.

Проф. А. А. Саткевич

Консультант по Опытно-Строительному Делу.

ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

II. КООРДИНАТНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ МАСШТАБАХ, КАК СРЕДСТВО АНАЛИЗА ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЯ.

ПЕТРОГРАД.
1922.

Настоящий выпуск является продолжением серии выпусков трудов по Опытно - Строительному Делу Управления Ирригационными работами в Туркестане.

рота ,д .26.

Замеченные опечатки.

Страница.	Строка.	Напечатано.	Следует читать.
7	8 сверху	оказалась бы	оказывалась бы
12	17 снизу	ür Ingenieure	für Ingenieure
16	5 снизу	Scheicher	Schleicher
31	4 сверху	координатам	координатным
60	10 снизу	ур—ия	ур—иями
64 (огл.)	4 сверху	логарифмическим	с логарифмическим
„ „	13 сверху	изменениям	изменением

V

1. Введение.

Метод представления подвергаемых анализу рядов числовых значений переменных, между которыми устанавливается зависимость, приводит иногда в обыкновенных декартовых координатах с равномерным масштабом отложения длин к изображениям довольно сложного вида, по которым затруднительно судить о математической природе той зависимости, какою возможно аналитически объединить весь исследуемый опытный материал. В таких условиях часто оказывается целесообразным отрешиться от равномерности масштабного роста координат и избрать другой, хотя и более сложный, но ближе отвечающий характеру ожидаемой зависимости, закон измерения длин при их отложении, определяемый какою-либо специально устанавливаемой функцией основных переменных. Идея такого метода возникла весьма давно: еще I. H. Lambert в своих „Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“ (Bd. I, Berlin, 1765, §§ 44—52, p. 453—465) определенно рекомендует его в подходящих случаях и в приводимых двух числовых примерах фактически применяет отложение длин по законам sin и log. Правда, эта идея была так основательно забыта, (Мне, напр., не удалось найти решительно ни у кого ссылки на Lambert'a), что ее родоначальником всеми признается сейчас французский инженер Léon Lalanne, систематично изложивший этот новый метод геометрических представлений лишь восемьдесят лет спустя в статье: „Mémoire sur les tables graphiques et sur la géometrie anamorphique“ (Annales des ponts et chaussées, 1846) перепечатанной с некоторыми сокращениями в виде брошюры „Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques à trois variables“, Paris, 1878, p. 63) и присвоивший видоизменению графических форм от замены равномерного масштаба масштабом так сказать—функциональным название анаморфозы. Однако, и со времени мемуара Лалана протекло уже семьдесят с лишним лет—срок достаточно почтенный в истории образования научно-технических методов. Не смотря на это, вопрос об анаморфозах и в частности—о координатных представлениях в логарифмическом масштабе, говоря условно короче—о логарифмическом координировании, находится и по сейчас в той же первоначальной стадии развития, в какой мы встречаем его на страницах работ Лалана. Практически идея получила весьма многочисленные применения, и теперь, не только можно зачастую встретить в специальных книгах и среди статей научно-технических журналов ее выражения в форме логарифмографических таблиц или диаграм различного, преимущественно—расчетного, назначения, но даже во многих странах имеется уже в продаже особый вид клетчатой бумаги с разграфлением по логарифмическому закону для облегчения построения соответствующего типа диаграм. Теория же вопроса так и не сделала следующего шага—не перевела новый прием графических изображений в разряд самодовлеющих методов координатных представлений, предназначаемых не только для так сказать—„статического" воспроизведения фиксированных аналитических формул, но и для динамического изучения законов математических изменений, природа которых соответствует характеру принимаемого функционального роста масштабов. Это сохранение идеи только в качестве канвы для мертвых расчетных схем вызывает особые сожаления по отношению к координированию в логарифмических масштабах, имеющему, благодаря обширности возможных применений и своеобразной целостности математической природы логарифма, все шансы на существование в форме специального научно-мыслительного средства, в виде координатной системы, допускающей непосредственное изучение многих специальных геометрических форм, на почве законов математической изменяемости (роста) функций.

Применение логарифмических координат к исследованию эмпирических зависимостей, практиковавшееся с самого момента возникновения этой формы координирования, является уже по самому существу импульсом к анализу свойств изображений, получаемых в таких координатах. А потому, естественно, приурочивая рассуждения к указанному, большой практической важности, вопросу, искать именно в этих рассуждениях почву для методологического расширения идеи координирования в логарифмических масштабах. Предлагаемая работа, трактуя о приемах исследования эмпирических зависимостей, и представляет собою в то же время попытку специального изучения свойств изображений в логарифмических координатах, имеющую в виду подобающую этой координатной системе роль, не просто вспомогательно-вычислительного приема, а систематического средства для математического анализа функций. Правда, эта обще-идейная тенденция отражена в приводимых исследованиях лишь частично—лишь постолько, поскольку это соответствует прямым целям работы; однако, она выражается некоторыми своеобразными приемами построения рассуждений: введением непосредственно в формулы логарифмических координат и действиями над ними, выражением идеи переноса начала координат в форме, приуроченной к логарифмическим масштабам, а главное—планомерным изучением математической природы целого класса кривых, специфически свойственных логарифмическому координированию. Я позволяю себе особенно подчеркивать здесь эту основную руководившую мной тенденцию в надежде на то, что она побудит, быть может, и других к дальнейшим еще более широким попыткам освобождения идеи логарифмографических представлений от теперешнего узко служебного ее назначения и придания ей характера более самостоятельного средства научных изысканий, теоретически полнее замкнутого в кругу своих специальных представлений.

---

2. Общие свойства и практическое значение координатных систем с логарифмическим масштабом.

А. Координатная система с логарифмическим масштабом для обоих осей — (Логарифмические координаты).

Одночленная формула, содержащая две переменных x и y в любых, целых или дробных, положительных или отрицательных, степенях, имеющая общий вид

$$x^m y^n = k, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

логарифмированием приводится к форме:

$$m\,Lgx + n\,Lgy = Lgk, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

линейной относительно логарифмов обоих переменных. Чтобы окончательно подчеркнуть эту линейность, введем обозначения:

$$X = Lgx,\ Y = Lgy \text{ и } K = Lgk$$

и перепишем формулу (2) так:

$$mX + nY = K \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

В таких условиях, если уговориться при координатном построении формул откладывать по абсцисам и ординатам не величины самих переменных, а их логарифмы, в какой-либо из логарифмических систем, то одночленные выражения типа (1) будут геометрически приводить всегда к прямолинейным изображениям.

Приводя ур-ние (3) к форме обыкновенной линейной зависимости

$$Y = -\frac{m}{n}X + \frac{K}{n},$$

непосредственно замечаем, что отношение показателей при переменных характеризует наклон прямой: $tg\alpha = -\frac{m}{n}$; а свободный член $\frac{K}{n} = \frac{Lg\,k}{n} = Lg\sqrt[n]{k}$ дает возможность суждения об отрезке, отделяемом прямой на оси OY ординат.

Если бы количество k заключало в себе вообще некоторую 3-ю переменную z и ур-ие (1) являлось лишь частным выражением более общей формулы, в которой переменной z придано одно из ее значений, то для всякого другого значения z та же формула приобретала бы выражение, различающееся от прежнего лишь величиною k, а следовательно и K. При этом, новое графическое изображение формулы получалось бы также прямолинейным, и изображающая формулу прямая оказалась бы наклоненной к осям координат под темже, как и ранее-полученная прямая, углом, так как угол ее наклона зависит только от показателей m и n при переменных x и y, а эти показатели оставались бы прежними. Однако, различие в величинах K сказывалось бы в том, что новая прямая не совпадала бы с прежней, а являлась сдвинутой относительно нее, но, как пояснено, ей паралельной.

Итак, всякая одночленная формула, содержащая 3 переменных, при придании одной из переменных ряда отдельных ее значений приводит к изображению в виде системы прямых, паралельных между собою.

Отмеченные специальные свойства логарифмических изображений в применении к формулам одночленного вида делают весьма выгодным применение логарифмической системы координат в большом числе случаев. Осуществление идеи логарифмического координирования, как и всякого координирования анаморфирующего изображения, может производиться двояко: или 1) путем предварительного преобразования численных выражений координат наносимых на чертеж точек—в данном случае путем их предварительного логарифмирования—и затем масштабного отложения уже не самих этих данных для построения количеств, а их логарифмов, или же 2) заблаговременным составлением логарифмической сетки, т. е. клетчатой бумаги, построенной по точкам логарифмического подразделения координатных осей, числовой разметкою делений клетчатой бумаги значениями первоначальных чисел, отвечающих отложенным логарифмам, и построением в такой сетке заданных количеств, применительно к числам сделанной цифровой разметки. Первый прием удобен, если выстраивается сравнительно небольшое число точек и если при этом, напр., производится сравнительное их построение и в условиях другого масштабного подразделения координат. Второй прием выгоден при большом числе отдельных построений и некоторой так сказать— предвзятости в отношении логарифмического вида формулы.

Удобства, представляемые готовой логарифмической клетчатой бумагой, привели к тому, что в различных государствах появились в продаже логарифмические сетки, воспроизводимые путем гравирования и литографирования. О существовании в продаже такой клетчатой бумаги имеются указания и в английской литературе, и в бельгийской, и в германской. Мною еще в 1898 году были выпущены в свет „логарифмографические таблицы для расчета систем центрального отопления и вентиляции“, причем в сопровождавшей эти таблицы особой книге (на стр. 8-й, в выноске) указывалось, что в случае поступления запросов мною будут изготовлены оттиски логарифмической сетки с гравированного на камне клише, а в 1908 году такие сетки были пущены мною в продажу. Вскоре затем в Германии появилась логарифмическая бумага, прекрасно изданная фирмою „Carl Schleicher und Schüll“ в Düren (Rheinland), имеющая по сравнению с моей преимущества более крупного масштаба и удобно размеченных делений и выпущенная к тому же в двух форматах.

Всякая логарифмическая клетчатая бумага характерна в том отношении, что нанесенная на ней сетка представляет собою многократное точное повторение одного и того же квадрата со всеми его подразделениями, который отвечает пределам чисел от 1 до 10 (при логарифмировании по десятичной системе, как это обыкновенно принято) в направлении каждой из осей. Логарифм 1 есть 0, логарифм 10-ти есть 1; поэтому, длина стороны такого квадрата является единицей логарифмического построения. Чем большею выбрать такую единицу, тем яснее будет чертеж, но тем более потребует он и места. В сущности, для каждого случая практики есть свои наилучшие пределы указанного единичного размера, но заблаговременное изготовление бумаги требует установления одной определенной единичной длины. В таких условиях приходится вообще предпочитать сеть с более крупной единицей длины. Квадрат сетки для чисел от 1 до 10 должен иметь внутри себя в направлениях обоих осей, подразделения для последовательных чисел 2, 3, 4, . . . 9, а также для чисел промежуточных $1,_1$, $1,_2$, $1,_3$, . . . $2,_1$, $2,_2$, . $9,_9$. а если возможно, то и более мелкие. Закон наростания логарифмов приводит к тому, что деления через равные промежутки в значениях аргумента идут, прогрессивно-сближаясь друг с другом, благодаря чему легко отличить начальный угол квадрата, которым должен служить угол с наиболее редким графлением на клетки. Обыкновенно, постоянно прогрессирующее сближение делений заставляет даже деления в пределах одного квадрата наносить сначала через бóльшие числовые значения интервалов аргумента, а затем, с некоторого деления, через интервалы сокращенные. Если к описанному квадрату примкнуть его продолжением такой же точно второй квадрат, то без всяких изменений нанесенные деления определят места логарифмов чисел, в 10 раз больших тех, что захватывал 1-ый квадрат, т. е. чисел от 10 до 100, (а именно 20-ти, 30-ти, ... 90-та и промежуточных)—по той причине, что логарифмы этих чисел отличаются от логарифмов прежнего ряда чисел лишь на целую единицу ($1 = Lg\ 10$), сохраняя точно значения мантисс; а графически прибавка единицы и выражается тем, что весь 2-й квадрат отодвинут на единицу (на длину первого квадрата) от начала координат. Конечно, такое изменение градуировки имеет место лишь в отношении той оси, в направлении которой произведен сдвиг; говоря иначе, для нанесения дальнейших делений в направлении другой оси придется примкнуть новые квадраты к предыдущим в поперечном предыдущему направлении. При таком многократном использовании одного и того же квадрата с его графическими делениями интервалы делений в каждом последующем квадрате отвечают все бòльшим и бóльшим числовым интервалам в аргументах (в основных переменных), и притом в каждом следующем квадрате в 10 раз бóльшим, чем в предыдущем. В этом несомненно кроется некоторый недостаток, но, как увидим ниже, в то же время и достоинство логарифмического координирования.

Итак, логарифмическая клетчатая бумага представляет собою многократное повторение одного и того же квадрата (со всеми его подразделениями) в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Предполагая производить на такой бумаге построение, надлежит прежде всего выбрать место начала координат. Началом координат должна явиться одна из точек пересечения систем прямых, разделяющих между собою отдельные квадраты. Это начало координат отвечает значениям первоначальных координат (аргументов) x и y равным единице, так как для таких аргументов логарифм равен нулю. Конечно, могут быть случаи, когда начало координат может быть назначено и за пределами чертежа.

Следуя поочередно вдоль обоих координатных осей в направлении сближения делений, придется по миновании длины одного квадрата поставить подпись аргумента 10, через три 1000 и т. д., соответственно размечая промежуточные деления. Идя затем по координатным осям от начала в направлении обратном предыдущему, придется, пройдя один квадрат, поставить у его границы со следующим квадратом 0,1, так как числа в 10 раз меньшие имеют на единицу меньшие логарифмы, затем через два квадрата поставить число 0,01, через три 0,001 и т. д., опять заполняя промежуточными числами мелкие подразделения квадратов. В логарифмической сети не найдется места для нулевых значений первообразных координат; можно лишь учитывать их значения сколь-угодно мелкие, но все же неравные нулю. Мало того,—в системе этой нет совершенно возможности изображать отрицательные значения первообразных координат, так как логарифмов для отрицательных чисел не существует. Это, несомненно, большой недостаток логарифмических координат, но в большом числе практических случаев, имеющих дело лишь с величинами существенно-положительными (напр., при протекании воды по трубам—количество жидкости или, так наз., расход ее, потеря напора, диаметр трубы, скорость течения — все эти величины положительны по самой постановке задачи), этот недостаток не дает себя чувствовать. Если приходится применять логарифмическое координирование к количествам, приобретающим в частных случаях и отрицательные значения, то проще всего вводить в исследование координаты с постоянными добавками, парализующими отрицательные величины, что конечно отразится и видоизменением получаемых формул, требующих впоследствии небольшого исправления (напр., вместо температур по Цельсиеву термометру вводить абсолютные температуры). Если какое-либо из количеств имеет все свои значения отрицательными, то можно все построение произвести для этого количества, учитываемого с обратным знаком, т. е. для его соответствующих положительных значений, и в результате произвести преобразование формулы, отвечающее перемене знака перед указываемым количеством (если то, конечно, допускает математическая природа формулы).

Некоторая кажущаяся на первый взгляд сложность всех этих свойств на самом деле уже при незначительном навыке скоро отпадает, и исполнение построений производится просто, быстро и уверенно. Во всяком случае, для всех нежелающих применять специальную логарифмически-разграфленную бумагу, остается другой прием построения—в координатах с обыкновенным масштабом, но уже не самих задаваемых количеств, а их логарифмов. При отложении логарифмов, если приходится иметь дело с числами, значительно отличающимися от единицы, следует нулевую точку отложения логарифмов выбирать вне чертежа, чтобы не иметь пустых, неиспользуемых мест его, в ущерб, конечно, крупности масштаба и потому отчетливости изображений.

Изображения в логарифмических координатах, кроме удобного представления одночленных формул прямыми линиями—отдельными или системами паралельных прямых,—обнаруживают еще два следующих, связанных одно с другим, выгодных с практической стороны качества:

1) Построенный в логарифмических координатах чертеж является сравнительно крупным для малых значений переменных и все более и более мелким для возрастающих их значений. Эта его особенность, вытекающая из свойства логарифмической функции, делает его особенно пригодным для разрешения вопросов инженерного характера, в применении как к большим, так и к малым устройствам.

2) Относительная точность выстраиваемой диаграммы (изображения), а вместе с тем и точность отсчетов по ней, получаются одинаковыми для всех значений переменных—как малых, так и больших. Это обстоятельство имеет особенное значение в применении к формулам практического характера, содержащим числовые коефициенты, характеризуемые определенными пределами относительной точности.

Что процент точности построения одинаков в пределах всей диаграммы, легко видеть из следующего: Возможная линейная ошибка при отложении или отсчете на-глаз в пределах всего чертежа одна и та же. В логарифмических же координатах она равна разности между логарифмами двух смежных значений переменного, т. е. логарифму отношения этих значений. Стало быть, логарифм такого отношения, а с ним, как само отношение, так и величина относительного приращения при случайной замене одного значения переменного другим—смежным—для всего чертежа являются одинаковыми.

Я не привожу здесь примеров построений в логарифмических координатах. По существу эти построения не представляют никаких затруднений: в литературе же имеется уже весьма значительное число изготовленных на логарифмической сети расчетных диаграмм и таблиц.

Мною лично, кроме указанных выше таблиц по отоплению и вентиляции, выпущены в свет: 1) те же таблицы в несколько сокращенном виде в сборнике „Технический Ежегодник“ за 1899 и за 1900 годы. 2) таблица для расчета сети водопроводных труб, составленная по формуле Лямпе и изданная сначала в 1898 г. в литографированной брошюре „Расчет водопроводной сети труб“ и в журнале „Строитель“ за 1898 год (№ 22; также № 11—12 за 1899 год) в упрощенном литографированном виде, а за тем в указанных двух выпусках „Технического Ежегодника и еще позже в виде отдельной большой таблицы—путем гравирования на камне, 3) такая же таблица, но для труб большого диаметра в брошюре „Графический расчет наивыгоднейших основных размеров инженерных сооружений в применении к водоснабжению С.-Петербурга из Ладожского озера“. („Известия С.-Петербургской Городской Думы“ за 1909 г. и также „Труды 9-го Русского водопроводного съезда в Тифлисе 1911 г., стр. 527—544) и, наконец, 4) таблица для расчета основных размеров паровой машины, опубликованная в журнале „Вестник Общества Технологов“, т. 21, 1914 г. № 12, стр. 488—490.

Соображения о составлении логарифмических таблиц, сопровождаемые частными примерами, можно найти, кроме указанных во введении классических мемуаров Léon Lalanne'a, также в книге: Ch. August Vogler—„Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauche bei Schnellrechnen sowie beim Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter“, Berlin, 1877, p. VIII + 196 + VI Taf. Метод логарифмо-графических представлений затрогивается в настоящее время и многими прикладного характера руководствами по математике, предназначенными специально для инженеров или физиков; напр., очень образно он изложен в книге W. Koestler und M. Tramer—Differential-und Integrelrechnung—Infinitesimalrechnung ür Ingenieure, auch zum Selbststudium“, I Teil—Grundlagen (Berlin, 1912, p. V + 484) на стр. 224—235, где в ссылке приводится и некоторая журнальная литература. Отдельные полезные практического свойства указания можно найти в статье проф. В. Глушкова: „К вопросу о построении кривых расходов воды и вообще эмпирических кривых вида $y = a\ (b + x)^m$ или $x = A + By^n$“ (Вып. 25-й Материалов, издаваемых Управлением гидрометрической части в Европейской России—Отдела Земельных Улучшений Министерства Земледелия, Петроград 1915, 19 стр. + 8 диагр. + I числ. таблица; также: Гидрологический Вестник, № 3 того же года) Метод интересно по форме использован проф. М. Ясюковичем в его работах: „Графические расчеты в водопроводном деле“. —II „Расчет водостоков с помощью логарифмо-графических таблиц“ (С.-Петербург, 1906, 27 стр. + 1 л. черт. и 4 табл.; также „Инженерный Журнал“, 1907, № 11—12, стр. 1—27 + 1 л. черт. и 4 табл.) и „Исследование вопроса об истечении воды из трубопровода с наконечником в связи с расчетом фонтанных и пожарных струй“ (С.-Петербург, 1908, 55 стр. + 1 диагр. + 1 отд. рис. + 7 табл).

Чтобы исчерпать все те сведения, которые могут оказаться для нас полезными в дальнейшем, приведу здесь еще соображения о видоизменениях, вносимых в формулы переменою осей при логарифмическом координировании, тем более, что этот вопрос не затрогивается повидимому ни в одном из литературных источников.

Поставим себе вопрос: Как изменяются логарифмические координаты точки при перемещении начала координат с сохранением направлений осей, т. е. при параллельном переносе последних? Пусть заданные (первообразные) координаты некоторой точки P суть x и y; ее логарифмические координаты X и Y. Связь между теми и другими $X = Lgx$ и $Y = Lgy$ или наоборот $x = a^{X}$ и $y = a^{Y}$, если a есть основание логарифмов, которое мы практически берем почти всегда равным 10-ти. По указанным выше правилам отыскивая в логарифмических координатах изображение точки P, мы откладываем в каком-либо выбранном нами (или отвечающем построению клетчатой бумаги) равномерном масштабе не координаты x и y, а их логарифмы, т. е. X и Y, подписывая однако обыкновенно значения x и y. Если для упрощения исследования мы составили его ур—ие в логарифмических координатах с перемещенным центром (O), то затем нам предстоит вернуться к настоящему началу O, преобразовав полученную нами математическую формулу заменою координат (не меняя однако самого существа зависимости). Уговоримся координаты точки, отнесенной к временному началу, которое будем называть старым началом, отмечать заключением их в скобки, сохраняя за координатами по отношению к нормальному, новому, началу те же обозначения без скобок. Чтобы не изменить выражаемой ур—ием зависимости, в нем надо разуметь содержащимися старые координаты (X) и (Y) или (x) и (y), но конечно их можно заменить равными им выражениями в новых координатах X и Y или x и y. Если координаты старого начала (O) по отношению к новым осям назовем буквами $X_0 = Lgx_0$ и $Y_0 = Lgy_0$ то, применяя известные формулы паралелльного переноса осей в обыкновенных координатах к количествам, обозначаемым большими буквами, которые откладываются в равномерном (обыкновенном) масштабе, напишем, что:

$$\left.\begin{array}{ll}(X) = X - X_0 \text{ и обратно} & X = (X) + X_0 \\ (Y) = Y - Y_0 & Y = (Y) + Y_0\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

А в таком случае, вводя вместо больших букв их выражения в виде логарифмов от количеств, обозначаемых соответственными малыми буквами, найдем, что:

$$Lg(x) = Lgx - Lgx_0 \text{ и обратно } Lgx = Lg(x) + Lg\,x_0$$
$$Lg(y) = Lgy - Lgy_0 \qquad Lgy = Lg(y) + Lg\,y_0$$

и стало быть, что:

$$\left.\begin{aligned} (x) &= \frac{x}{x_0} \text{ и обратно } & x &= x_0(x) \\ (y) &= \frac{y}{y_0} & y &= y_0(y) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

Следовательно, если некоторая зависимость получена в отношении временного начала *(0)* и записана уже не в логарифмических координатах *(X)* и *(У)*, а в отвечающих им значениях координат основных (x) и (y), то перемена начала осей сказывается умножением координат на числа, соответствующие логарифмическим координатам старого начала в новых осях.

Это правило полезно знать для того, чтобы предвидеть, что именно привносит с собою в отыскиваемую окончательную зависимость перемещение начала координат при исследованиях в логарифмической системе. Конечно, самую-то подстановку можно вообще исполнять и через посредство общих формул для декартовой координатной системы, применяемых к количествам, обозначаемых нами большими буквами *X* и *У*.

Применим такое же разсуждение к перемене координатных осей логарифмической системы поворотом их на угол φ с сохранением начала. Принимая φ положительным в случае вращения осей в направлении хода часов и отрицательным при обратном вращении и отличая опять-таки прежние координаты (x) и (y) каждой точки от новых ее же координат x и y заключением первых в скобки, воспользуемся обыкновенными зависимостями, справедливыми в отношении координат, измеряемых равномерным масштабом, т. е. количеств обозначаемых нами большими буквами.

В таких условиях напишем, что:

$$\left.\begin{aligned} (X) &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi \text{ и обратно } & X &= (X)\cos\varphi - (Y)\sin\varphi \\ (Y) &= -X\sin\varphi + Y\cos\varphi \;\;\text{,,} \quad\;\; \text{,,} & Y &= (X)\sin\varphi + (Y)\cos\varphi \end{aligned}\right\} (6)$$

Вводя же вместо больших букв малые, заменой первых логарифмами вторых, найдем, что:

$$\left.\begin{aligned} (x) &= x^{\cos\varphi} y^{\sin\varphi} \text{ и обратно } & x &= \frac{(x)^{\cos\varphi}}{(y)^{\sin\varphi}} \\ (y) &= \frac{y^{\cos\varphi}}{x^{\sin\varphi}} \quad\;\; \text{,,} \quad\;\; \text{,,} & y &= (x)^{\sin\varphi}\,(y)^{\cos\varphi} \end{aligned}\right\} (7)$$

В частности, если поворот делается на угол в 45°, т. е, $\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$, то $sin\varphi = cos\varphi = \sqrt{2}$ и потому:

$$\left.\begin{aligned} (x) &= \left\{ xy \right\}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ и обратно } x = \left\{ \frac{(x)}{(y)} \right\}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ (y) &= \left\{ \frac{y}{x} \right\}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad\qquad\qquad y = \left\{ (x)(y) \right\}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}\right\} \dots\dots (8)$$

Поворот этот при построении на логарифмической бумаге неудобо-исполним, так как деления бумаги при этом утрачивают свой смысл; однако, он может быть полезен при некоторых позициях занимаемых изследуемой кривой.

Более простым представляется поворот осей на $\varphi = 90° = \frac{\pi}{2}$, так как при этом $sin\varphi = 1$ и $cos\varphi = o$, а потому:

$$\left.\begin{aligned} (x) &= y \text{ и обратно } x = \frac{1}{(y)} \\ (y) &= \frac{1}{x} \qquad\qquad y = (x) \end{aligned}\right| \dots\dots\dots\dots (9)$$

Эта замена позволит нам несколько упростить совокупное исследование целого семейства кривых (кривых логарифмического сложения и вычитания), располагающегося вокруг одной центральной точки. Вообще же, конечно, поворот логарифмических осей на 90° едва ли представляет особый практический интерес.

B. Координатная система с логарифмическим масштабом для одной из осей (Полулогарифмические координаты).

Введение логарифмического закона измерения координат вместо обыкновенного равномерного может быть осуществляемо и по отношению лишь к одной из координатных осей с сохранением для другой оси обыкновенного масштаба. В такой координатной системе получаются упрощенные по форме изображения для многих формул логарифмических (т. е. содержащих в себе логарифм) и показательных (экспотенциальных). Действительно, если имеем, напр., формулу типа

$$Lg\, x^a + by = c$$

то, вводя обозначения: $Lgx = X$ *и* $y = У$, перепишем ее в форме линейного ур-ия:

$$aX + bУ = c$$

Так же, если заданная формула имеет вид:

$$y = c^{mx+n},$$

то логарифмированием она обращается в формулу:

$$Lg\,y = (mx+n)\ Lg\,c,$$

которая, при введнии координатных обозначений $x = X$ и $Lg\,y = У$, преобразуется в ур-ие линейное:

$$У = kX + q$$

Конечно, ту координату, которая не получает изменений в способе измерения, можно и не обозначать новою буквою, что здесь сделано больше для симметрии окончательного результата. Какую из координатных осей подвергать логарифмическому закону отсчетов, зависит вообще от нашего произвола.

Таким образом, предвидя возможность получения для отыскиваемой математической зависимости формулы логарифмического или, что то же, показательного типа, стоит вообще попытаться значения одного из связываемых формулой количеств (какого— это надо прикинуть по числовому материалу, если нет других предуказаний) откладывать в форме его логарифмов.

Изображение формул в полулогарифмических координатах, как было уже указано и для координат логарифмических, может быть получаемо на практике двояко: либо 1) путем построения их на обыкновенной клетчатой бумаге (или вообще в обыкновенных координатах), но при условии отложения вместо значений одной из двух координат каждой точки ее логарифма, по особо выбираемому для того масштабу (особой графической единице отложения); либо 2) исполнением построения на специально заблаговременно заготовляемой полулогарифмической сетке уже не отложением длин, а просто по числовым подписям отдельных линий деления сетки. Такая полулогарифмическая клетчатая бумага также выпущена в свет германской фирмой „Scheicher und Schüll“ в Düren'е (Rheinland), правда повидимому лишь в пределах одной логарифмической единицы (т. е., для концевой отметки в десять раз превышающей начальную), впрочем в весьма крупном масштабе.

По своим свойствам и по деталям пользования полулогарифмическая бумага и полулогарифмические координаты вообще ничем не отличаются от системы логарифмической, в отношении того направления отсчетов конечно, для которого устанавливается логарифмический закон; для другого же координатного направления свойства и условия пользования идентичны с таковыми же для обыкновенных координат с равномерным масштабом. Поэтому, после всего сказанного ранее, здесь нет необходимости в дополнительных раз'яснениях. Нетрудно разрешить вопрос и о перенесении начала координат применительно к ранее сказанному, если в том встретится надобность, и, стало быть, вопрос этот здесь тоже можно не деталировать.

---

3. Исследование специальных кривых в координатах с логарифмическим масштабом для обеих осей—в логарифмической сети.

Как было выше специально пояснено, логарифмическая система координат, т. е. способ графических построений в декартовых координатах с применением логарифмического масштаба отложения длин, оказывается особенно приспособленным для изображения одночленных аналитических выражений, так как такие выражения приводят к прямолинейным геометрическим формам. Является однако естественное стремление в случаях получения криволинейных изображений пытаться трансформировать их в изображения прямолинейные путем придания (одному или обоим) аргументам логарифмов положительных или отрицательных добавков, причем в случае успеха составляемая формула получает вид одночленной, но не по отношению к самим переменным x и y, а к переменным этим с некоторыми добавками, т. е. к $x \pm u$ и $y \pm v$, что мало ее усложняет в смысле легкости практических применений. В этих видах полезно знать, какие именно кривые могут быть таким образом преобразуемы в линии прямые.

Здесь надлежит попутно отметить, что практическое значение вопроса о выпрямлении криволинейных изображений в логарифмических координатах путем введения добавков к аргументам неоднократно заставляло различных исследователей изобретать способы к его хотя бы приближенному разрешению. Так, Charles Proteus Steinmetz, решая в своей „Engineering Mathematics“ (New-York, 1911, p. 238—241) частный пример, для которого кривая, построенная в логарифмических координатах, является наиболее близкой к прямолинейности среди других изображающих явление кривых, переводит эту так сказать—логарифмическую кривую постоянным добавком к аргументу в кривую обратного изгиба и потом, при помощи интерполирования, определяет уменьшенную величину добавка, отвечающую возможно-прямолинейному начертанию линии. Несомненно, что такой способ представляется довольно копотливым, случайным, кустарным, если можно так выразиться. Более остроумное решение вопроса предложил профессор В. Глушков в своей статье „К вопросу о построении кривых расходов воды и вообще эмпирических кривых вида $y = a\ (b + x)^m$ или $x = A + By^n$, помещенной в „Гидрологическом Вестнике“ № 3 за 1915 год и вышедшей затем отдельной брошюрой в виде выпуска 25-го „Материалов, издаваемых Управлением Гидрометрической части в Европейской России“ Отдела Земельных Улучшений Министерства Земледелия (Петроград, 1915, стр. 16+3, см. стр. 3—5). Профессор Глушков предлагает определять аналитически такую величину добавка к аргументу, при которой три выбранные точки кривой, переместясь, располагаются на одной прямой, считая, что, если спрямление таким путем достижимо, то требуемое значение добавка этим и будет установлено. Самый прием действий получается чрезвычайно простым; изложим его в такой форме: Чтобы три точки с координатами X_1 и Y_1, X_2 и Y_2, X_3 и Y_3 лежали на одной прямой, должно удовлетворяться условие:

$$\frac{Y_1 - Y_2}{Y_2 - Y_3} = \frac{X_1 - X_2}{X_2 - X_3}$$

Если построение ведется при этом в логарифмическом масштабе, то под координатами X и У приходится разуметь не основные переменные задачи, а их логарифмы. В частности, для зависимости $y^n = k(x \pm u)^m$ (с постоянными k, m и n), логарифмированием приводимой к виду $Lg\,y = \frac{1}{n} Lg\,k + \frac{m}{n}\,Lg\,(x \pm u)$, надо будет принять $Y = Lgy$ и $X = Lg\,(x \pm u)$. Внося эти выражения в аналитическое условие прямолинейности, перепишем последнее в такой форме:

$$\frac{Lg\,\frac{y_1}{y_2}}{Lg\,\frac{y_2}{y_3}} = \frac{Lg\,\frac{x_1 \pm u}{x_2 \pm u}}{Lg\,\frac{x_2 \pm u}{x_3 \pm u}}$$

Связь эту можно весьма просто использовать, придавая обоим отношениям значение, равное единице. В таком случае, первое отношение дает

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3}, \qquad \text{т. е. } y_2 = \sqrt{y_1 \cdot y_3},$$

указывая, что три точки должны быть выбираемы таким образом, чтобы ордината средней из них выбиралась средней геометрической между ординатами двух крайних (вообще — по возможности взаимно-удаленных). Кстати сказать, в логарифмическом масштабе это дает среднюю точку лежащею, в направлении отсчета ординат, посредине между обоими крайними точками (так как $Lg\,y_1 = \frac{1}{2}\,(Lg\;y_2 + Lg\;y_3)$). Вторая часть равенства при ее значении равном единице дает соотношение:

$$\frac{x_1 \pm u}{x_2 \pm u} = \frac{x_2 \pm u}{x_3 \pm u}, \text{ т. е. } x_2^2 \pm 2\,ux_2 = x_1 x_3 \pm u(x_1 + x_3),$$

откуда и определяется нужная величина u равенством;

$$u = \pm \frac{x_2^2 - x_1 x_3}{(x_1 + x_3) - 2x_2}$$

Подставляя в эту формулу опытные значения аргумента x, отвечающие выбранным трем значениям y, мы и получим такую величину добавка u к аргументу x, который сдвигает эти три точки до их размещения на одной прямой. Останется лишь построением прочих точек убедиться, ложатся ли и они с допустимым приближением на ту же прямую или нет. Как видно, этот способ дает уже некоторую определенную схему действий, обладает так сказать—системностью, но и он ведет отчасти в „слепую“, не анализируя заранее возможности спрямления всей кривой, а просто сдвигая на удачу три точки до их размещения на общей прямой, и дальше предлагает удостоверяться в успехе непосредственной поверкой.

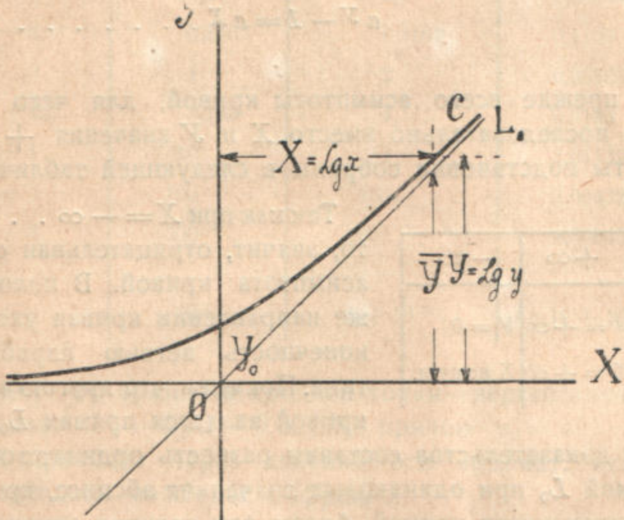
Казалось бы, что наиболее логичным, наиболее систематичным, теоретически-обоснованным решением вопроса представляется изучение вида и свойств тех, получаемых в логарифмических масштабах построения, кривых линий, которые способны к превращениям в прямые при посредстве введения добавков к основным переменным.

Чтобы исследовать форму, свойства и признаки таких трансформируемых кривых, проще всего изучить условия обратного перехода, т. е. анализировать кривые, получающиеся из линий прямых при увеличении аргументов логарифмов координат постоянными (независимыми от этих координат) прибавками. Как мы увидим в дальнейшем, анализ этот приводит к двум определенным, специальным семействам кривых, которым, по почину R. Mehmke, приличествует название логарифмик сложения и логарифмик вычитания. Заметим, что Мемке названия эти присвоил только двум кривым, одной — из одного семейства и другой—из другого (типы, далее обозначаемые $\frac{1}{x} + 1 = y$ и $1 - \frac{1}{x} = y$), по той причине, что они воспроизводят графически Гауссовы зависимости, положенные в основание логарифмических таблиц сумм и разностей; но, повидимому, названия эти уместно распространить на все разновидности кривых соответственных категорий. Укажем еще, что применение, даваемое Мемке этим кривым,—иное, чем то, которое мы дадим им дальше: Мемке пользовался ими для графического решения числовых ур-ий, а не для подыскания аналитических форм, отвечающих данным кривым.

Роль, которую логарифмики сложения и вычитания играют в наших дальнейших исследованиях, заставляет нас ими предварительно специально заняться.

А. Общие сведения о логарифмиках сложения и вычитания.

Если мы представим себе в логарифмических координатах прямую L_0, равнонаклонную к однозначным частям обоих координатвых осей (что уговоримся именовать прямым наклоном) и проходящую через начало, т. е. так называемую—первую биссектрису координатного угла (фиг. 1), то такая прямая будет характеризоваться равенством обоих координат для каждой ее точки, причем эти координаты могут быть написаны как в логарифмической форме, так, конечно, и непосредственно, в виде аргументов логарифмов. Исследуем теперь такую кривую C, точки которой отличаются от точек прямой L_0 с теми же ординатами уменьшением аргумента в логарифмическом выражении абсцис на единицу. Говоря



Фиг. 1.

иначе: если аргументы логарифмов, откладываемых по абсциссам и по ординатам, обозначаются буквами x и y малыми, а сами эти логарифмы соответствующими буквами X и Y большими (т. е. $X = Lg\,x$ и $Y = Lg\,y$), то для подлежащей нашему рассмотрению кривой C эти количества связаны зависимостью $x + 1 = y$ и след. $Lg\,(x+1) = Lg\,y$ или, что тоже самое, при обозначении буквою a основания логарифмов, $a^X + 1 = a^Y$ (т. е. $Lg\,(a^X + 1) = Lg\,(a^Y) = Lg\,y$).

Если исследуемую кривую C, которую уговоримся называть логарифмикой сложения, мысленно относить к обыкновенным координатам с равномерным делением осей, то ур—ие ее надлежит записывать в форме зависимости от X и Y, откладываемых в равномерном масштабе, а не в отношении x и y, входящих как аргументы в выражения логарифмов. Стало быть, мысля кривую C в привычных нам обыкновенных координатах, мы должны присваивать ей ур—ие:

$$a^{X} - 1 = a^{Y} \dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Заметим, что, так как условие $x+1=y$ может быть переписано в виде $y-1=x$, составленное ур—ие можно преобразовать и в такое:

$$a^{Y} - 1 = a^{X} \dots\dots\dots \quad (10\ bis)$$

Найдем прежде всего асимптоты кривой, для чего подставим в ур—ие последовательно вместо X и Y значения $+\infty$ и $-\infty$. Результаты подстановки собраны в следующей табличке:

	$+\infty$	$-\infty$
При X	$Y=+\infty$	$Y=0$
„ Y	$X=+\infty$	X не сущ.

Так как при $X=-\infty$ . . . . $Y=0$, то, значит, отрицательная ось X есть асимптота кривой. В положительном же направлении кривая уходит в бесконечность ветвью параболического типа. Покажем, что другою асимптотою кривой является прямая L_0.

Для доказательства составим разность ординат точек кривой C и прямой L_0 при одинаковых значениях абсцисс, причем количества, касающиеся прямой, будем для отличия отмечать чертою над соответственными буквами. Ур—ие кривой: $a^{X}+1=a^{Y}$; ур—ие прямой L_0: $a^{\overline{X}}=a^{\overline{Y}}$. Деля эти ур—ия почленно при $X=\overline{X}$, найдем, что $a^{Y-\overline{Y}}=1+a^{-X}$; а подводя затем X к $+\infty$, получим в пределе $Y-\overline{Y}=0$, что и обнаруживает асимптотическое сближение кривой с прямою. Заметим кстати, что при отриц. $X=-X$ ур—ие кривой дает $a^{Y}=a^{-X}+1$, т. е. количество, равное только-что полученному; это показывает, что отстояния точек кривой от отриц. оси абсцис, являющейся одною асимптотою, равны отстояниям кривой (по направлению ординат) от другой асимптоты L_0 при численно одинаковых значениях абсцисс этих точек (стало быть—равноудаленных от оси ординат). Обстоятельство это облегчает построение кривой по точкам, так как одна половина кривой непосредственно выстраивается по другой.

Подсчитаем для примера координаты нескольких точек кривой (при $a = 10$):

При $X =$	$a^X = 10^X =$	$a^Y = a^X + 1 =$	и след. $Y =$
$-n$	$1/10^n$	$1 + 1/10^n$	$Lg\,(1 + 1/10^n)$
. . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
-2	0,01	1,01	0,00432
-1	0,1	1,1	0,04319
$-0{,}5$	0,3162	1,3162	0,1193
0	1	2	0,30103
$+0{,}5$	3,162	4,162	0,6193
$+1$	10	11	1,04139
$+2$	100	101	2,00432
$+3$	1000	1001	3.00043
. . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
$+n$	10^n	$1 + 10^n$	$Lg\,(1 + 10^n)$

Кстати видим, что ордината средней точки—пересечения кривой с осью ординат $Y_0 = Lg\,2 = 0{,}30103$, причем $y_0 = a^{Y_0} = 2$, т. е., что кривая проходит через деление оси ординат, отмеченное в логарифмическом масштабе цифрою 2.

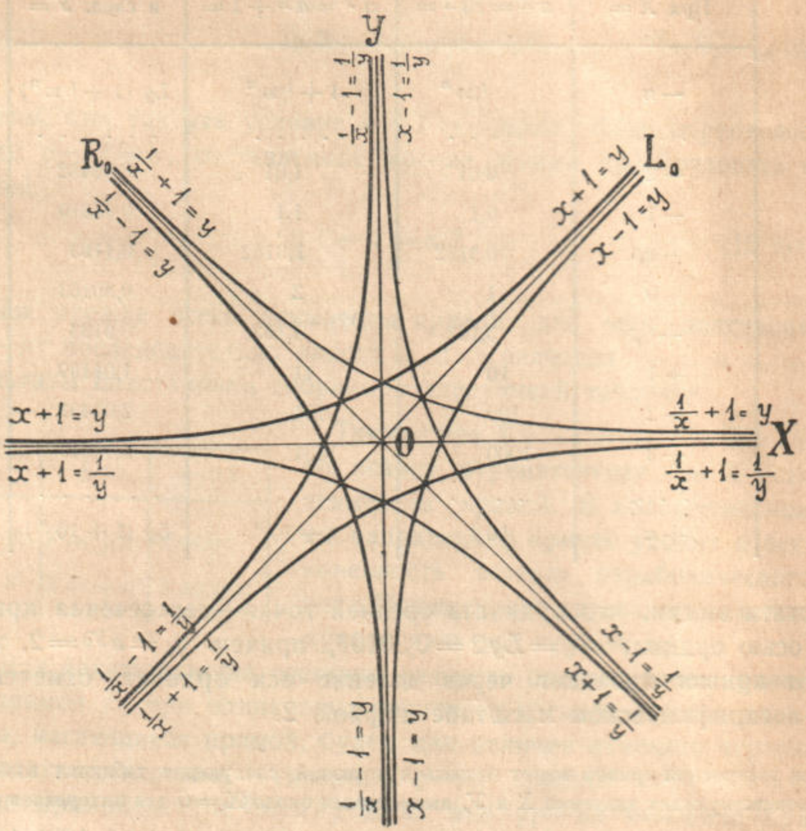
При построении кривой может оказаться полезной следующая табличка взаимно-соответствующих значений X и Y, вычисленная около $X = 0$ для интервалов в 0,1:

При $X =$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0	$+0{,}1$	$+0{,}2$	$+0{,}3$	$+0{,}4$	$+0{,}5$
$Y =$	0,1193	0,1455	0,1764	0,2124	0,2539	0,3010	0,3539	0,4124	0,4764	0,5455	0,6193.

Исследованная кривая имеет еще 7 ей аналогичных, обнаруживающих некоторую взаимную симметрию и в общем образующих как бы звезду логарифмик сложения (фиг. 2); основное аналитическое свойство каждой из таких кривых подписано у обоих ее концов.

Исследуя любое из ур—ий, отвечающих выписанным при кривых условиям, можно было бы получить все приведенные выше заключения и убедиться, что по форме все кривые идентичны и различаются лишь расположением (поворотом относительно коорд.

осей). Все кривые могут быть получены одна из другой путем замены x на $\frac{1}{x}$ или y на $\frac{1}{y}$ (т. е. a^{X} на a^{-X} или $a^{У}$ на $a^{-У}$) и путем взаимной перестановки x и y (X и $У$), причем в первом случае



Фиг. 2.

(замены)—кривые располагаются соответственно симметрично относительно осей координат, во втором же случае (перестановки) — обнаруживают симметрию около равноделящих прямых (биссектрис) L_0 и R_0.

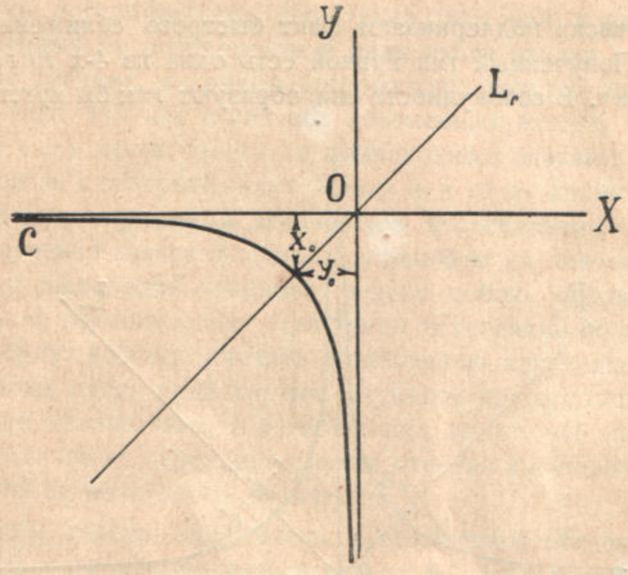
Исследуем теперь кривую другого типа, определяемую видоизмененным условием $-x+1=y$, с отрицательным знаком перед одним из переменных. В обыкновенных координатах это приводит к ур—ию:

$$1-a^{X}=a^{У} \text{ или, что то же, } 1-a^{У}=a^{X} \quad . \quad . \quad (11)$$

Исследуем характер отвечающей этому ур—ию кривой. Прежде всего, для нахождения асимптот подставим вместо X и затем $У$ бесконечные значения; получим:

	$+\infty$	$-\infty$
При X	У не сущ.	$У=0$
„ У	X не сущ.	$X=0$

Ясно, что двумя асимптотами являются отрицательные части обоих координатных осей. Вообще, вся кривая лежит в области отрицательных значений обоих координат, в чем легко убедиться. Переписав ур—ие в форме



Фиг. 3.

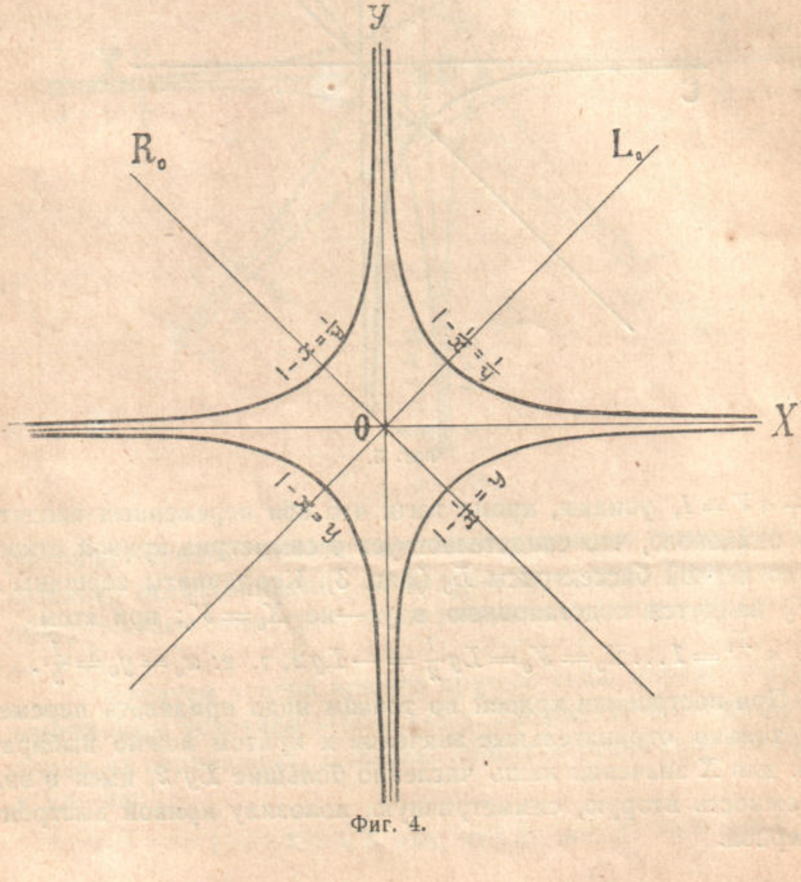
$a^X + a^У = 1$, увидим, кроме того, что оба переменных входят в него одинаково, что свидетельствует о симметрии кривой относительно первой биссектрисы L_0 (фиг. 3). Координаты вершины X_0 и $У_0$ найдутся подстановкою в ур—ие $X_0 = У_0$; при этом

$$2\,a^{X_0} = 1 \ldots X_0 = У_0 = Lg\frac{1}{2} = -Lg\,2, \text{ т. е. } x_0 = y_0 = \frac{1}{2}.$$

При построении кривой по точкам надо придавать переменным только отрицательные значения и притом можно выбирать напр. для X значения лишь численно большие $Lg\ 2$, имея в виду возможность вторую, симметричную, половину кривой выстроить по первой.

При $X =$	$a^X = 10^X =$	$a^Y = 1 - a^X =$	и след. $Y =$
$Lg\ 2 = 0{,}301$	0,5	0,5	—0,301
$Lg\ 3 = 0{,}477$	0,3333	0,6667	—0,176
$Lg\ 4 = 0{,}602$	0,25	0,75	—0,125
$Lg\ 10 = 1$	0,1	0,9	—0,046
$Lg\ 100 = 2$	0,01	0,99	—0,0044
$Lg\ 1000 = 3$	0,001	0,999	—0,00043

Эти числа подчеркивают факт быстрого сближения кривой с осями. Полученный тип кривой есть одна из 4-х логарифмик вычитания. В совокупности они образуют как бы крест (фиг. 4).

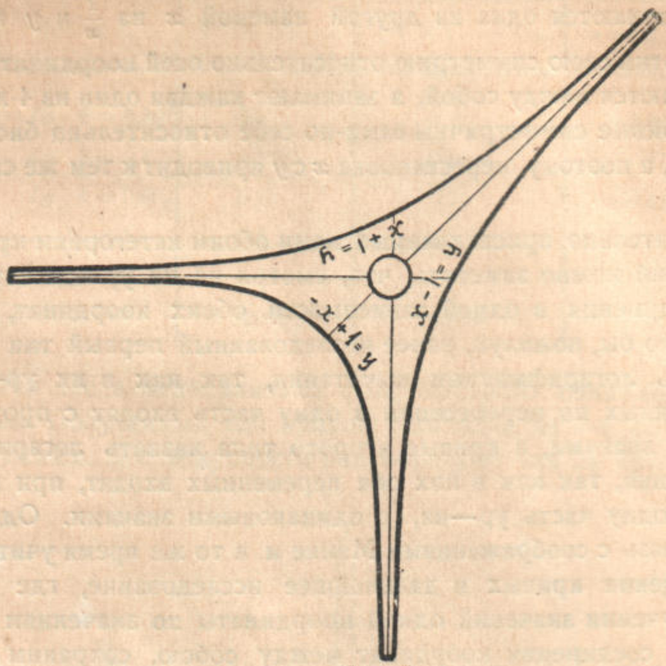


Фиг. 4.

Кривые получаются одна из другой заменой x на $\frac{1}{x}$ и y на $\frac{1}{y}$, определяя этим свою симметрию относительно осей координат. Они не пересекаются между собой, а занимают каждая один из 4-х квадрантов. Кривые симметричны сами-по-себе относительно биссектрис L_0 и R_0, а поэтому, перестановка x с y приводит к тем же самым кривым.

Относительно присваиваемых нами обоим категориям кривых наименований можно заметить, что, смотря на их ур—ие с точки зрения соединения в одной зависимости обоих координат, правильнее было бы, пожалуй, ранее исследованный первый тип кривых назвать логарифмиками вычитания, так как в их ур—иях оба переменных по перенесении в одну часть входят с противоположными знаками, а кривые второго типа назвать логарифмиками сложения, так как в них обя переменных входят, при перенесении в одну часть ур—ия, с одинаковыми *знаками*. Однако, сохраняя связь с соображениями Мемке и в то же время учитывая смысл введения кривых в дальнейшее исследование, где речь идет о получении значений одной координаты по значениям другой, а не о соединении координат между собою, сохраним введенную выше терминологию. При таком толковании логарифмики сложения будут вообще отвечать образованию аргументов одного из переменных путем прибавления аргумента другого переменного к некоторым количествам, а логарифмики вычитания—получению аргумента одного из переменных путем отнятия аргумента другого переменного от некоторого количества.

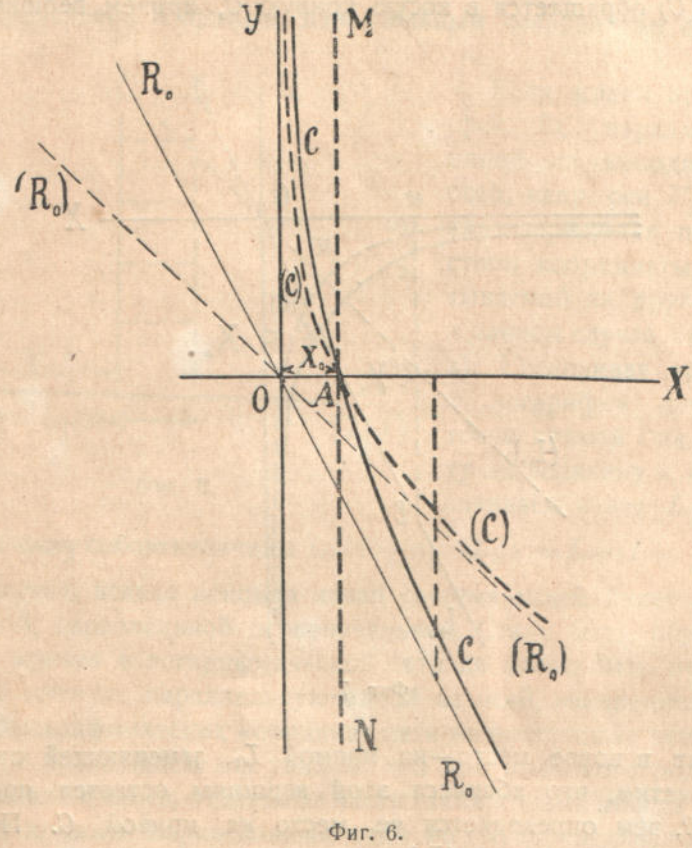
Отметим теперь одно очень существенное обстоятельство. При данной логарифмической сети, т. е., говоря общее,—при фиксации выбора единицы для логарифмических построений (Lg 10) форма отвечающих такому масштабу логарифмик сложения и вычитания становится строго определенной. Производя на такой логарифмической бумаге или, вообще, в таком логарифмическом масштабе построение эмпирических кривых, полезно приготовить (вырезать из дерева, из целюлоидной пластинки или нанести на какую-либо прозрачную пластинку) лекал вида, показанного на фиг. 5-й. Прикладывая этот повертываемый надлежащим образом, лекал к кривой, можно непосредственно каждый раз убеждаться, подходит ли кривая к типу исследованных выше.



Фиг. 5.

Рассмотрим, наконец, еще некоторое изменение форм и ур-ий исследованных логарифмик, происходящее от введения в эти ур-ия степеней. Возьмем для примера зависимость $(x-1)^m = \frac{1}{y^n}$ (в которой, как и вообще при логарифмических построениях, x и y должны иметь лишь положительные значения, почему и при извлечении корней надлежит брать лишь положительные знаки). Написанную зависимость можно переписать так: $x - 1 = \frac{1}{y^{\frac{n}{m}}}$. Такое ур-ие разнится от ранее исследованного соответственного ур-ия $(x) - 1 = \frac{1}{(y)}$, в котором для временного отличия переменные заключены в скобки, лишь заменой прежнего (y) новым $y^{\frac{n}{m}}$. Говоря иначе $y = (y)^{\frac{m}{n}}$ и след. $Y = Lg\, y = \frac{m}{n}\, Lg\, (y)$, т. е., все ординаты, отвечающие прежним абсциссам, умножаются, по сравнению с прежними ординатами, на $\frac{m}{n}$. Кривая деформируется,—растягиваясь, если $\frac{m}{n} > 1$, или сжимаясь, если $\frac{m}{n} < 1$.

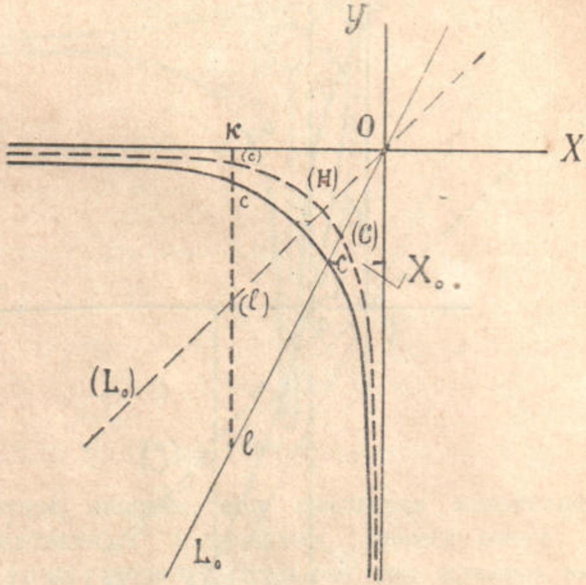
Так, (см. фиг. 6), если $\frac{m}{n} = 2$ (под m и n подразумеваются вообще числа положительные), точка A на оси абсцисс остается на месте ($X_0 = Lg\,2$), вообще же кривая (C) переходит в кривую



Фиг. 6.

C (Прямая (R_0) в R_0). Крайние границы для всевозможных положений деформируемой кривой—прямой угол XOY и прямая MN. Обратим внимание еще на то, что асимптотическая прямая R_0 получается из равнонаклонной к осям прямой (R_0) также умножением всех ординат на $\frac{m}{n}$.

Возьмем аналогичное видоизменение логарифмики вычитания $(1-x)^{m} = y^{n}$, говоря иначе, $1+x = y^{\frac{n}{m}}$. Новое y в отношении к прежнему (y) выражается соотношением $y=(y)^{\frac{m}{n}}$ т. е. $Y = Lg\ y = \frac{m}{n}\ Lg\ (y)$. Опять при сохранении значений X все Y умножаются на $\frac{m}{n}$. Так (фиг. 7), при $\frac{m}{n}=2$ кривая равнобочная (C) обращается в косую кривую C, причем вершина (H)

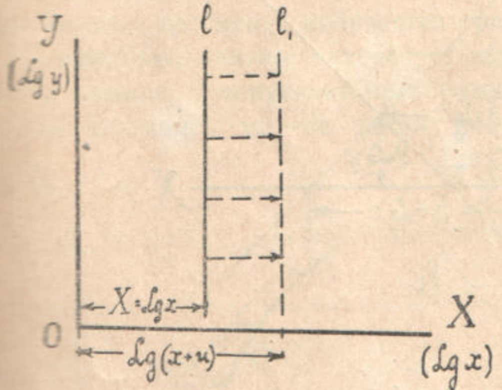


Фиг .7.

переходит в новое место—на прямой L_0, заменяющей прямую (L_0). Заметим, что абсцисса этой вершины остается прежней $X_0 = Lg\,2$, чем определяется ее место на кривой C. Прямая L_0 отличается от прямой (L_0) также увеличением всех ординат в $\frac{m}{n}$ раз при сохранении тех же абсцисс $(lk:(l)\,k = ck:(c)\,k = \frac{m}{n})$. Вообще, можно рассматривать кривую (C) как проекцию на плоскость чертежа кривой C, повернутой около оси OX вместе с ее плоскостью на такой угол, косинус которого равен $\frac{n}{m}$.

В. Кривые линии в логарифмической сети, приводимые к прямым изменением одного из переменных на некоторую величину.

а. Приведение к прямым, параллельным координатам осям.

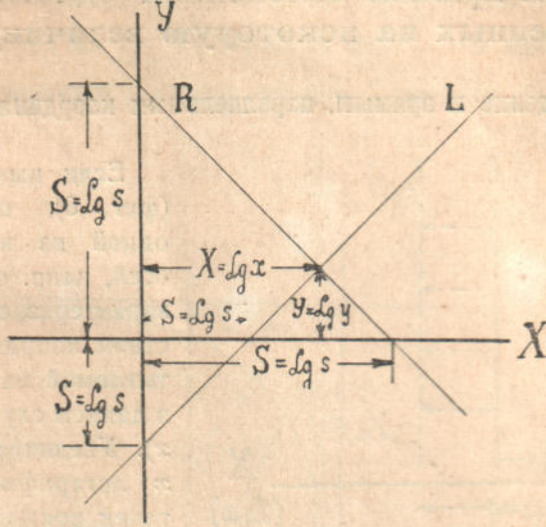


Фиг. 8.

Если имеем прямую l (фиг. 8), параллельную одной из координатных осей, напр. оси Y, то она характеризуется постоянством координаты, отсчитываемой на другой оси в данном случае X (и след. x). Увеличивая аргумент x логарифма для всех точек прямой l на одну и ту же величину u, мы увеличиваем и все $Lg\ x$ на равные между собою величины $Lg(x+u) - Lg\,x = Log\left(1+\frac{u}{x}\right)$. А в таком случае, всякая искомая новая система точек будет лежать на прямой, параллельной первоначальной. Стало быть, обратно— никакая кривая в логарифмической сети не может быть преобразована в прямую, параллельную одной из осей, изменением аргументов логарифмических координат сети на постоянные величины. Правда, в дальнейшем мы увидим, что при подобного рода преобразованиях кривых, отдельные части таких кривых иногда весьма близки к прямым, паралелльным осям, но это справедливо лишь в определенных пределах и притом с некоторым приближением.

б. Приведение кривых линий к прямым, равнонаклонным к осям координат.

Равнонаклонная к осям прямая может иметь одно из двух направлений: или она параллельна первой биссектрисе координатного угла, т. е. пересекает обе координатные оси в их частях, отвечающих различным знакам, говоря еще иначе, имеет скат влево, называемый нами прямым,—такую прямую будем обозначать буквою L,—или же она параллельна второй бисектриссе координатного угла, т. е. пересекает обе оси в областях одинаковых знаков, имея обратный скат, вправо,—такую кривую будем обо-



Фиг. 9.

значать буквою R (фиг. 9). Равнонаклонность той и другой прямой к осям приводит к такому виду ур—ий этих линий:

Для прямой L: $X - Y = S$ или в логар. коорд.

$$Lgx - Lgy = Lgs, \text{ т. е. } \frac{x}{y} = s \text{ или } \frac{x}{s} = y$$

Для прямой R: $X + Y = S$ или в логар. коорд.

$$Lgx + Lgy = Lgs, \text{ т. е. } xy = s \text{ или } \frac{x}{s} = \frac{1}{y} \quad \ldots\ldots (12)$$

В обоих случаях буквою S обозначены (численно для двух этих случаев различные) отрезки на осях от начала O, измеряемые в логарифмическом масштабе, а буквою s значение аргумента, отвечающее логарифму, равному S. Уговоримся при этом количеству S присваивать тот знак, который принадлежит отрезку, отсекаемому прямой на оси X.

В частных случаях, когда прямая L или R проходит через начало, $S = 0$, т. е. $s = 1$, и след. ур—ия прямых приобретают вид:

прямой L — прямой R

$$X - Y = 0, \text{ или } x = y \qquad X + Y = 0, \text{ или } xy = 1 \quad \ldots (13)$$

Если мы затем изменим ур—ие прямой L или прямой R тем, что одному из основных переменных, скажем напр. x, придадим некоторый добавок u, то при построении в логарифмическом масштабе этот всюду одинаковый добавок отразится различно на графическом сдвиге различных точек прямых, вызывая тем большую величину сдвига, чем меньше значение увеличиваемого переменного (в данном случае x) (фиг. 10). В результате такого приращения аргумента получается трансформация прямой линии в кривую. Нас, однако, интересует обратная постановка вопроса: какая кривая C допускает преобразование в прямую L или R? Чтобы составить ур—ие такой допускающей трансформацию

Фиг. 10.

кривой C, уговоримся обозначения X и Y, а также x и y, относить к точкам этой прямой и затем посмотрим можно ли, уменьшая аргумент одной из координат, скажем—аргумент x, на одинаковую для всех точек кривой величину u, так подобрать эту величину u, чтобы смещенные точки кривой легли на прямую L или R, равнонаклонную к осям. Допуская возможность этого факта, мы должны принять, что измененные координаты кривой $X_1 = Lg\,(x-u)$ и $Y_1 = Lg\,y$ удовлетворяют выписанным выше ур—ям (12) прямой L или R. Пользуясь этими ур—иями, напишем, что:

Для случая прямой L: Для случая прямой R

$\frac{x-u}{s} = y$ или $\frac{a^X - a^U}{a^S} = a^Y$, $\frac{x-u}{s} = \frac{1}{y}$, или $\frac{a^X - a^U}{a^S} = a^{-Y}$,

если буквою U обозначим логарифм u и буквою S логарифм s.

Полученная зависимость, связывающая координаты, присваиваемые по условию точкам кривой C, и является ур—ем кривой, в случае если исследуемая трансформация возможна. Исследование составленных ур—ий не представит особого труда. В самом деле, попробуем переписать составленное ур—ие (в обоих видах), перенеся начало координат в точку, лежащую соответственно на прямой L или R и имеющую абсциссу $X_0 = Lgu = U$. Так как новое начало выбирается на прямой L или R, то ордината Y_0 его получится подстановкой $X_0 = Lgu = U$ в ур—ие прямой, т. е. представится такою:

Для прямой L:

$y_0 = \frac{u}{s}$ или $Y_0 = U - S$

Для прямой R:

$y_0 = \frac{s}{u}$ или $Y_0 = S - U$

Перенос начала в обыкновенных координатах изменяет координаты всех точек уменьшением их на количества, равные соответственным координатам вновь выбранного начала, и след. в ур—ие, вместо прежних координат, приходится подставлять новые с добавками соответственных координат нового начала. Совершая перенос, можно было бы применить это положение, оперируя с большими буквами.

Действительно, подставляя вместо X . . . $X + X_0 = X + U$ и вместо Y . . . $Y \pm (U - S)$, мы получили бы ур—ие кривой таким:

$$\frac{a^{X+U} - a^{U}}{a^{S}} = a^{\pm Y + U - S}$$

или, по сокращении,

$$a^{X} - 1 = a^{\pm Y}, \text{ т. е. } x - 1 = y \text{ или } x - 1 = \frac{1}{y} \quad . \; . \; . \; (14)$$

Однако, имея в виду сравнительную простоту оперирования непосредственно с аргументами x и y логарифмических координат и вспоминая (стр. 13—14), что перенос начала в логарифмической координатной сети делит все аргументы логарифмов на соответственные аргументы, отвечающие новому началу, т. е., что прежние аргументы в ур—ии должны быть заменены новыми, умноженными на соответственные аргументы логарифмических координат нового начала, подставим непосредственно:

Для случая прямой L: вместо x... ux и вместо y... $\frac{u}{s} y$

или

Для случая прямой R: вместо x... ux и вместо y... $\frac{s}{u} y$

причем получим

$$\frac{ux-u}{s}=\frac{u}{s}y \quad \text{или} \quad \frac{ux-u}{s}=\frac{u}{s}\frac{1}{y}$$

и по сокращении:

$$x-1=y \quad \text{или} \quad x-1=\frac{1}{y}$$

Полученные ур—ия не зависят от величины u и, следовательно, вид допускающих трансформацию кривых всегда один и тот же в отношении некоторого начала, положение которого в плоскости чертежа зависит, однако, непосредственно от величины u, т. е. разного для различного положения кривой на чертеже. Что касается самого вида кривой, то он нам уже достаточно известен, так как два полученных ур—ия принадлежат двум кривым из типа логарифмик сложения.

Интересно несколько уяснить себе причину, почему одна и та же кривая при переносе в логарифмической сети переводит кривые типа, содержащего в ур—ии $x \pm 1$, в кривые, ур—ие которых содержит $x \pm u$ с различными величинами u. Возьмем для примера кривую с ур—ем $x - 1 = \frac{1}{y}$. Ур—ие кривой, как мы знаем, имеет эту форму, если пересечение О асимптот кривой совпадает с началом координат, и оно показывает, что при одинаковых ординатах абсциссы кривой отличаются от абсцисс прямой, являющейся наклонной асимптотой,—единицей. Если затем эту кривую, вместе с ее асимптотами и точкой О пересечения последних, передвинуть по логарифмической сети вдоль оси X, напр. совместив точку О с точкой, имеющей абсциссу $U = Lgu$, то значения всех абсцисс и кривой и ее наклонной асимптоты увеличатся на Lgu или, говоря иначе, отметки абсцисс (значения аргумента) умножатся на u, а при этом и разница аргументов абсцисс, ранее равная 1, обратится в u, т. е. абсциссы кривой уже будут отличаться своими аргументами от соответственных абсцисс наклонной ее асимптоты на величину u. Перенос кривой с асимптотами, параллельный оси $У$, не изменяет этих разниц аргументов, т. е. не влияет на u, но однако отражается на s (*или* S) в ур—ии кривой.

Таким же точно путем можно исследовать и другие аналогично-построенные ур—ия и отвечающие им кривые, по форме совпадающие с изученными выше логарифмиками сложения, а также и вычитания. Не приводя, однако, здесь выкладок, чтобы не загромождать ими изложения, сопоставим сразу результаты в следующую общую таблицу, в первой графе которой поместим последовательно все известные нам типы основных логарифмик, во 2-й графе укажем значения координат нового начала, перенесением в которое приводятся к типовому ур—ию 1-й графы ур—ия, перечисляемые в графе 3-й, и, наконец в 4-й графе, об'единим ур—ия 3-й графы в общие формы выражений, допускающих преобразования в типовые ур—ия 1-й графы. Всю запись произведем не в линейных значениях, откладываемых в логарифмических координатах логарифмов чисел, а прямо в значениях аргументов этих откладываемых логарифмов.

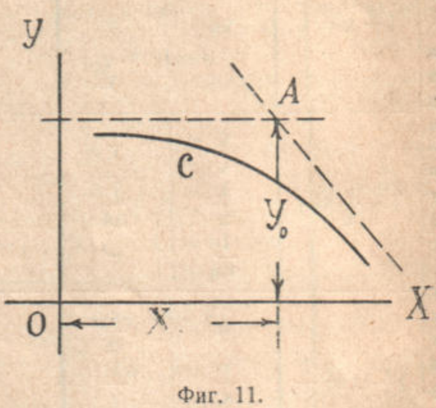
Типы уравнений кривых, допускающих приведение их к прямым линиям при помощи логарифмик сложения и вычитания.

	Основные типы ур-ий логарифмик	Координаты нового начала для приведения x_0	y_0	Типы ур-ий, приводимых к основным переносом начала	Обобщенный вид ур-ий, допускающих приведение
Логарифмики сложения.	$x + 1 = y$	u vs $\frac{v}{s}$	$\frac{u}{s}$ v v	$(x + u) : y = s$ $x : (y - v) = s$ $\frac{1}{x} \cdot (y - v) = s$	$x - qy = -k$
	$x - 1 = y$	u vs $\frac{v}{s}$	$\frac{u}{s}$ v v	$(x - u) : y = s$ $x : (y + v) = s$ $\frac{1}{x} \cdot (y + v) = s$	$x - qy = k$
	$\frac{1}{x} + 1 = y$	$\frac{s}{v}$ $\frac{1}{u}$ $\frac{1}{vs}$	v $\frac{u}{s}$ v	$x . (y - v) = s$ $\left(\frac{1}{x} + u\right) : y = s$ $\frac{1}{x} : (y - v) = s$	$xy - px = k$
	$\frac{1}{x} - 1 = y$	$\frac{s}{v}$ $\frac{1}{u}$ $\frac{1}{vs}$	v $\frac{u}{s}$ v	$x . (y + v) = s$ $\left(\frac{1}{x} - u\right) : y = s$ $\frac{1}{x} : (y + v) = s$	$xy + px = k$
	$x + 1 = \frac{1}{y}$	u vs $\frac{v}{s}$	$\frac{s}{u}$ $\frac{1}{v}$ $\frac{1}{v}$	$(x + u) . y = s$ $x : \left(\frac{1}{y} - v\right) = s$ $\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{y} - v\right) = s$	$xy + qy = k$
	$x - 1 = \frac{1}{y}$	u vs $\frac{v}{s}$	$\frac{s}{u}$ $\frac{1}{v}$ $\frac{1}{v}$	$(x - u) . y = s$ $x : \left(\frac{1}{y} + v\right) = s$ $\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{y} + v\right) = s$	$xy - qy = k$

	Основные типы ур-ий логарифмик.	Координаты нового начала для приведения		Типы ур-ий, приводимых к основным переносом начала	Обобщенный вид ур-ий, допускающих приведение
		x_0	y_0		
Логарифмики сложения	$\frac{1}{x}+1=\frac{1}{y}$	$\frac{1}{u}$ $\frac{1}{vs}$ $\frac{s}{v}$	$\frac{s}{u}$ $\frac{1}{v}$ $\frac{1}{v}$	$\left(\frac{1}{x}+u\right)\cdot y=s$ $\frac{1}{x}:\left(\frac{1}{y}-v\right)=s$ $x.\left(\frac{1}{y}-v\right)=s$	$xy-px+qy=o$
	$\frac{1}{x}-1=\frac{1}{y}$	$\frac{1}{u}$ $\frac{1}{vs}$ $\frac{s}{v}$	$\frac{s}{u}$ $\frac{1}{v}$ $\frac{1}{v}$	$\left(\frac{1}{x}-u\right).y=s$ $\frac{1}{x}:\left(\frac{1}{y}+v\right)=s$ $x.\left(\frac{1}{y}+v\right)=s$	$xy+px-qy=o$
Логарифмики вычитания	$1-x=y$	u vs vs	$\frac{u}{s}$ v v	$(u-x):y=s$ $x:(v-y)=s$ $\frac{1}{x}:(v-y)=s$	$x+qy=k$
	$1-\frac{1}{x}=y$	$\frac{s}{v}$ $\frac{1}{u}$ $\frac{1}{vs}$	v $\frac{1}{us}$ v	$x.(v-y)=s$ $\left(u-\frac{1}{x}\right):y=s$ $\frac{1}{x}:(v-y)=s$	$xy-px=-k$
	$1-x=\frac{1}{y}$	u $\frac{v}{s}$ vs	$\frac{s}{u}$ $\frac{1}{v}$ $\frac{1}{v}$	$(u-x).y=s$ $\frac{1}{x}\cdot\left(v-\frac{1}{y}\right)=s$ $x:\left(v-\frac{1}{y}\right)=s$	$xy-qy=-k$
	$1-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$	$\frac{1}{u}$ $\frac{1}{vs}$ $\frac{s}{v}$	$\frac{s}{u}$ $\frac{1}{v}$ $\frac{1}{v}$	$\left(u-\frac{1}{x}\right).y=s$ $\frac{1}{x}:\left(v-\frac{1}{y}\right)=s$ $x:\left(v-\frac{1}{y}\right)=s$	$xy-px-qy=o$

Примечание: Все входящие в эту таблицу количества могут быть, конечно выражены и в размерах отрезков, откладываемых на логарифмической сети; для этого надлежит лишь всюду в ур-х малые буквы заменить основанием логарифмов a (=10) в степени соответствующих больших букв, если под последними разумеются логарифмы букв малых, а в графе координат нового начала непосредственно поставить вместо букв малых их логарифмы (или большие буквы). (Вводные обозначения составных количеств p, q и k могут быть при этом, для отличия, также заменены большими буквами).

Приведенная таблица дает удобоприменимое средство определения прибавков u и v (положительных или отрицательных) для обращения в прямые кривых, имеющих вид одного из типов основных логарифмик сложения или вычитания. При этом, тип логарифмики сложения характеризуется одной асимптотой—равнонаклонной к обоим осям, и другой—параллельной одной из этих осей, при отрезке между точкой пересечения асимптот и кривой в направлении остающейся оси, равном $Lg\,2$; тип же основной логарифмики вычитания отвечает существованию у кривой двух асимптот, параллельных обоим осям, с координатами вершины относительно точки пересечения асимптот, равными $Lg\,2$ и $Lg\,2$, и вообще при условии симметрии кривой относительно прямой, равноделящей угол между асимптотами. Для убеждения в принадлежности исследуемой кривой к той или другой категории лучше всего проверять форму кривой приложением описанного выше (стр. 27—28) лекала при повороте его соответствующим образом.



Фиг. 11.

Пусть, напр., построением эмпирических точек в логарифмических координатах получена кривая, показанная на фиг. 11. Приложением лекала найдем координаты A пересечения ее асимптот (отвечающего ей начала координат) $X_0 = Lg\,x_0$ и $Y_0 = Lg\,y_0$.

По звезде логарифмик сложения (стр. 24) тип ур-ия намечается в форме $x + 1 = \frac{1}{y}\cdot$ Только-что приведенная таблица показывает, что этому типу отвечают 3 разновидности ур-ия. Выберем, напр., первую $(x + u) . y = s$. Кривая может быть приведена к типовому ур-ию перенесением начала в точку с координатами $Lg\,x_0$ и $Lg\,y_0$ при $x_0 = u$ и $y_0 = \frac{s}{u}\cdot$ Следовательно, ур-ие исследуемой кривой, написанное уже в основных переменных (аргументах), что именно обыкновенно и требуется, есть: $(x+x_0)\,y=$ $=x_0 y_0$, и в ур-ие это надо лишь подставить числовые значения определенных нами количеств x_0 и y_0. Какое из 3-х ур-ий группы выбрать, зависит от желания: можно сообразоваться с числовыми значениями (дробностью) x_0 и y_0; напр., если y_0 малая дробь, быть может удобнее взять 2-ое или 3 е ур-ия. Впрочем, решение получается одним и тем же, хотя в несколько преобразованной форме, и потому естественно пожалуй руководиться видом формулы, которую желательно получить, или выбрать простейшую из форм.

Однако, приведенная выше таблица может быть вся в совокупности выражена одним простым правилом, вполне ее заменяющим. В самом деле, подставляя в любое из ур-ий третьей графы вместо u, v и s их выражения в координатах x_0 и y_0 вспомогательного начала, мы должны каждый раз получать, как в том нетрудно непосредственно убедиться, соответствующее ур-ие 1-й графы с заменой в нем x на $\frac{x}{x_0}$ и y на $\frac{y}{y_0}$, что отвечает условию изменения координатного начала. Так:

типовое ур-ие $x+1=y$ отвеч. ур-ию перемещ. кривой $\frac{x}{x_0}+1=\frac{y}{y_0}$

„ „ $x-1=y$ „ „ „ „ $\frac{x}{x_0}-1=\frac{y}{y_0}$

„ „ $\frac{1}{x}+1=y$ „ „ „ „ $\frac{x_0}{x}+1=\frac{y}{y_0}$

. . . .

„ „ $1-x=y$ „ „ „ „ $1-\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}$.

и т. д.

Поэтому, решая напр. только-что приведенный частный пример кривой, по форме отвечающей логарифмике сложения $x-1=\frac{1}{y}$, но имеющей аргументы логарифмических координат точки пересечения O асимптот равными отсчитываемым непосредственно величинам x_0 и y_0, можно сразу же написать ур-ие такой кривой в форме $\frac{x}{x_0}+1=\frac{y_0}{y}$, преобразуя затем написанное таким образом ур-ие, путем обыкновенных алгебраических действий, в любой вид, в частности в полученное ранее ур-ие $(x+x_0)\cdot y=x_0 y_0$. При такой постановке вопроса помещенная выше таблица теряет свое практическое значение и за ней, в сущности, остается лишь роль иллюстрации различных возможных частных случаев отвечающих разным формам исследуемого ур-ия.

c. Приведение кривых линий к прямым, неодинаково наклоненным к осям координат.

Если мы представим себе кривыя C и (C), приведенные на фиг. 6 ой (стр. 29), обе перенесенными в логарифмической сети параллельно самим себе вместе с их асимптотами в какое-либо иное место плоскости чертежа, причем положение точки O пересечения асимптот после переноса характеризуется, по отношению к прежнему началу, координатами $X_0 = Lg\, x_0$ и $L_0 = Lg\, y_0$, то, опираясь на только-что полученные результаты, мы можем написать, что

ур-ие прежн. кривой (C) $x - 1 = \frac{1}{y}$ обратится в ур. $\frac{x}{x_0} - 1 = \frac{y_0}{y}$

„ „ „ C $x - 1 = \frac{1}{y^{\frac{n}{m}}}$ „ „ $\frac{x}{x_0} - 1 = \left(\frac{y_0}{y}\right)^{\frac{n}{m}}$

Поэтому, если получаемая где-либо в плоскости логарифмических координат кривая обнаруживает возможность преобразования ее, пропорциональным — в $\frac{n}{m}$ раз — изменением всех ее ординат, в одну из типовых форм логарифмик сложения или равно—вычитания, то ур-ие такой кривой непосредственно может быть получено из ур-ия кривой типовой формы заменою в последнем $\frac{y_0}{y}$ на $\left(\frac{y_0}{y}\right)^{\frac{n}{m}}$. Стало быть, придется лишь убедиться в действительной возможности указанного преобразования. Средством для установления такой возможности является повидимому лишь проведение асимптот к обоим концам исследуемой кривой с проверкою в логарифмиках сложения удаления кривой от точки пересечения O асимптот в направлении одной от коорд. осей на длину равную $Lg\, 2$. Если точка O намечена, то помощью лекала можно прочертить типовую кривую с равнонаклонной асимптотой и соотношением координат обоих косых асимптот установить степень $\frac{n}{m}$, после чего можно еще проверить соблюдение одинаковости соотношения $\frac{n}{m}$ для точек кривых, равно-удаленных в направлении оси от начала. Конечно, эта операция является весьма затруднительною для сколько-нибудь точного выполнения.

особенно тогда, когда кривая задана рядом невполне безошибочных точек, и делается еще труднее осуществимой в случае деформированной логарифмики вычитания. Значительное облегчение может дать предуказание количества $\frac{n}{m}$, позволяющее предварительно выстроить специальный лекал для деформированного вида кривой.

С. Кривые линии в логарифмической сети, приводимые к прямолинейному закону изменением обоих переменных на некоторые величины.

Для упрощения исследования не будем теперь исходить из отдельного рассмотрения случаев обращения исследуемой кривой в прямую прямого или обратного уклонов, а поступим несколько формальнее, но зато короче, классифицируя все случаи по условиям сочетания в ур-ии переменных количеств x и y и присоединяемых к ним добавков u и v, подразумевая при этом все время под каждым обозначением величину существенно положительную (что отвечает и возможности логарифмирования), знаки же, с которыми эти величины входят в ур-ие, выставляя на вид непосредственно. Там, где будет возможно, будем вести исследование, ради сокращения выводов, сразу для случаев нескольких знаков.

а. Исследование зависимостей, имеющих форму отношения обоих основных переменных с вводимыми добавками.

Случаи, сводящиеся к типу отношения логарифмических аргументов с добавками, об‘единяемые в общем ур-ии:

$$\frac{\pm x \pm u}{\pm y \pm v} = s, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

допускающем всевозможные сочетания знаков, могут быть обследованы все сразу, так как они все без труда сводятся к случаям, уже анализированным. В самом деле, избавившись от знаменателя:

$$\pm x \pm u = s\,(\pm y \pm v) \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

и перенеся начало координат в точку с логарифмическими координатами $Lg\ x_0$ и $Lg\ y_0$, напишем ур-ие в виде:

$$\pm x_0 x \pm u = s\ (\pm y_0 y \pm v).$$

Чтобы привести его к прежним формам, останется лишь разделить все его члены на $(u \mp vs)$:

$$\pm \frac{x_0}{u \mp vs} x \pm 1 = \pm \frac{sy_0}{u \mp vs} y$$

и принять $x_0 = \pm (u \mp vs)$ и $y_0 = \pm \frac{u \mp vs}{s}$, выбирая при этой подстановке такие знаки перед правыми частями, чтобы для x_0 и y_0 получать положительные величины. После того получим ур—ие в упрощенном виде:

$$\pm x \pm 1 = \pm y,$$

отвечающем различным случаям, нами уже рассмотренным. Этот вывод показывает, что исследуемая нами основная форма сама по себе допускает алгебраические упрощения, сводящие ее к формам более простым, ранее изученным. В самом деле, как нетрудно видеть, добавки к обоим переменным легко могут быть об'единены в виде добавка лишь к одному, любому, из этих переменных. Практически же это отзовется тем, что, исходя из изученных нами типов кривых, мы будем получать отыскиваемые зависимости в более простых, ранее приведенных формах, не имея непосредственной необходимости, без особых побочных соображений, преобразовывать их в форму, теперь рассматриваемую.

Надлежит, пожалуй, лишь отметить, что, начиная анализ не с вида кривой в логарифмической сети, а с формы ур-ия, приходится иметь в виду, что при некоторых соотношениях числовых количеств u, v и s могут отсутствовать реальные выражения для некоторых значений переменных, что характеризует существование у соответственных кривых точек прекращения или остановки. Однако, предусматриваемый нами путь исследований начинается заданием самой кривой и притом, конечно, лишь в реальных ее пределах; поэтому, на подробном изучении соотношений между u, v и s, отвечающих местному прекращению кривых, нам не приходится особо останавливаться, тем более, что в случае необходимости такой анализ может быть, вероятно, всяким выполнен без особого труда.

в. Исследование зависимостей, имеющих форму произведения обоих основных переменных с придаваемыми им добавками.

Случаи этого второго типа, характеризуемого общим ур-ем:

$$(\pm x \pm u) \cdot (\pm y \pm v) = s$$

дают различные результаты при разных сочетаниях знаков, приводя иногда к особым, еще не рассматривавшимся нами кривым, и потому требуют раздельного изучения.

Случаи одинаковых знаков перед u и перед v.

При одинаковости знаков при u и при v их произведение входит в левую часть обязательно со знаком $+$, а перенесенное в правую часть ур-ия обращает последнюю в $s - uv$, причем это выражение может иметь либо положительные, либо отрицательные значения.

Примем временно $s - uv > o$.

Если вместе с тем x и y входят в ур-ие *с одинаковыми знаками*, то при раскрытии скобок xy получает обязательно знак $+$ и знаки при vx и uy получаются одинаковыми, т. е. все ур-ие можно записать так:

$$xy \pm (vx + uy) = s - uv.$$

Рассмотрим прежде всего это ур-ие в случае одного *знака* $+$ *перед скобками*.

Перенося начало координат в точку с логарифмическими координатами Lgx_0 и Lgy_0, перепишем ур-ие в отношении нового начала таким образом:

$$x_0 y_0 xy + (vx_0 x + uy_0 y) = s - uv$$

или

$$\frac{x_0 y_0}{s - uv}\, xy + \left(\frac{vx_0}{s - uv}\, x + \frac{uy_0}{s - uv}\, y \right) = 1$$

Чтобы упростить форму ур-ия, примем за аргументы координат начала:

$$x_0 = \frac{s - uv}{v} \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{s - uv}{u},$$

причем

$$\frac{x_0 y_0}{s - uv} = \frac{s - uv}{uv} \ \text{обозн.} = k$$

Ур-ие получится таким:

$$k \cdot xy + (x+y) = 1 \qquad \text{при } k = \frac{s - uv}{uv}$$

Чтобы отдать себе отчет о форме кривой, отвечающей этому условию, определим из него $y = \dfrac{1-x}{1+kx}$ и убедимся, что

при $x =$	0	полож. дробь	1	< 1
$y =$	1	полож. дробь	0	> 0, т. е. кривая

дальше не существует.

Кривая оказывается лежащей в левом нижнем квадранте координатного расположения и асимптотически касающейся обоих осей, т. е. в общем напоминает типовую логарифмику вычитания, характеризуемую условием $1 - x = y$ или $x + y = 1$.

Форма ур-ия, содержащего x и y симметрично, указывает и на сохранение симметричности формы по отношению к биссектрисе угла. Но координаты вершины кривой получаются иными, чем для логарифмики вычитания. В самом деле, подставляя $x = y$ и обозначая $x = y$ одною буквою z находим, что:

$$kz^2 + 2z = 1 \qquad \text{при } k = \frac{s - uv}{uv}$$

откуда при указанном k

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1+k}}{k} = \frac{\sqrt{1+k} - 1}{1+k-1} = \frac{1}{\sqrt{1+k}+1}$$

(Перед корнем знак —, как несоответствующий, пропущен).

Если в исследуемом ур-ии поставить *знак* — на месте выбранного знака $+$, т. е. взять это ур-ие в форме

$$xy - (vx + uy) = s - vu,$$

то совершенно аналогично получилось бы, что:

$$kxy - (x+y) = 1 \quad \text{при } k = \frac{s - uv}{uv}.$$

т. е.

$$y = \frac{1+x}{-1+kx}$$

След. при

$x =$	$< \frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	∞
$y =$	крив. не сущ.	∞	$\frac{1}{k}$

Кривая лежит в правом верхнем координатном углу, напоминая логарифмику вычитания $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$, но асимптотически сближаясь не с осями координат, а с прямыми, им параллельными и отстоящими от них на $Lg\frac{1}{k}$. Перенося еще раз начало и выбирая $x_0=\frac{1}{k}$ и $y_0=\frac{1}{k}$, мы получили бы ур-ие в форме:

$$xy-(x+y)=k$$

К тому же выводу можно подойти и иначе: Заменяя, в ур-ии ранее исследованной кривой $kxy+(x+y)=1$, x на $\frac{1}{x}$ и y на $\frac{1}{y}$, мы геометрически, в логарифмических координатах, получаем кривую, симметричную прежней относительно начала. Ур-ие же допускает в таком случае следующие преобразования:

$$k\frac{1}{x}\frac{1}{y}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$$

По умножении на xy:

$$xy-(x+y)=k$$

или:

$$\frac{1}{k}xy-\frac{1}{k}(x+y)=1$$

Вводя координатные аргументы x_0 и y_0 нового начала и принимая $x_0=k$ и $y_0=k$, получим ур-ие:

$$kxy-(x+y)=1,$$

т. е. как-раз подлежащее нашему исследованию, что и подтверждает соответствие этого ур-ия кривой, аналогичной прежней, но имеющей асимптотические концы идущими в прямо-противоположных прежним направлениях.

Практически выгоднее остановиться на ур-ии:

$$k\frac{1}{x}\frac{1}{y}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1,$$

отличающемся от ур-ия соответствующей типовой логарифмики вычитания $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ лишь добавком $k\frac{1}{x}\frac{1}{y}$, совершенно аналогичным добавку первого случая. При этом, начало координат для обеих симметрично расположенных кривых остается общим и координаты вершины кривой по линейной длине являются равными (значения же аргументов—величины обратные).

Возьмем теперь $s-uv<o$. В таком случае $uv-s>o$. Деля первоначальное ур-ие не на $s-uv$, а на $uv-s$ и принимая затем при введении x_0 и y_0:

$$x_{\circ}=\frac{uv-s}{v} \text{ и } y_{\circ}=\frac{uv-s}{u},$$

получим ур-ие:

$$\frac{uv-s}{uv}xy \pm (x+y)=-1,$$

в котором из двух знаков приходится выбрать лишь знак —, так как иначе сумма положительных количеств не может дать отрицательной единицы. То же ур-ие можно переписать и так (переменяя знаки у всех членов):

$$ky+(x+y)=1 \text{ при } k=\frac{s-uv}{uv}$$

Ур-ие это совершенно идентично с рассмотренным первым ур-ем всей группы, но лишь имеет коефициент $k<o$. Обстоятельство это однако не роняет справедливости дальнейших выкладок, приведенных для определения координат вершины, а потому выражение для аргумента этих логарифмитических координат $z=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa}+1}$ при $k=\frac{s-uv}{uv}$ остается справедливым и для этого случая. Для обоих разсмотренных случаев z получается величиной меньшей 1, дробной, чему отвечает и положение этих кривых левее и ниже начала координат. Наоборот, для кривой, полученной при введении $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ вместо x и y, лежащей выше и правее начала, координаты вершины должны быть большими единицы, но за то буквою z для однообразия вывода удобнее обозначить $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ для вершины, причем получится опять $z=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa}+1}$. Вообще, знаменатель $\sqrt{1+\kappa}+1$ представляет собою аргумент логарифмического отрезка, измеренного логарифмическим же масштабом, от начала делений в сторону увеличения числовых отметок и линейно равного каждой из двух равных координат вершины кривой относительно ее асимптот. Назовем $\sqrt{1+\kappa}+1$ буквою c. В таком случае:

$$1+k=(c-1)^2 \text{ и } k=(c-1)^2-1=c\,(c-2) \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Поэтому, если мы измерим у кривой отрезки, дающие координаты ее вершины относительно ее же асимптот, и найдем их оба равными $Lg\ c$, то, зная c, сейчас же определим и $k = c(c-2)$, т. е. коэффициент, с которым в типовую форму логарифмики вычитания, отвечающую данной кривой, надо ввести добавок в виде произведения переменных $\left(kxy\right.$ или $k\frac{1}{x}\frac{1}{y}$, смотря по тому, содержит типовое ур-ие x и y или $\frac{1}{x}$ и $\left.\frac{1}{y}\right)$ в ту часть ур-ия, в которую x входит с положительным знаком. Однако, нам надлежит еще распространить это правило на нерассмотренные пока случаи.

Продолжая сохранять одинаковость знаков перед u и v, примем теперь *знаки перед x и перед y различными.* При этом, xy войдет в ур-ие со знаком —, члены vx и uy получат разные знаки, и все ур-ие приобретет вид:

$$-xy \pm (vx - uy) = s - uv$$

Остановимся пока лишь на случае $s - uv > 0$ и покажем, что в таких условиях это ур-ие приводится к случаям, подобным только-что рассмотренным. Однако, эти случаи характеризовались одинаковостью знаков перед членами, содержащими переменные в отдельности. Попытаемся достичь того же и в данных условиях:

С этою целью, если в ур-ии *из двух знаков* остановимся на знаке $+$, разделим все ур-ие на x и перепишим его так:

$$u\frac{1}{x}y + (s - uv)\ \frac{1}{x} + y = v,$$

и, вводя затем $x_0\ y_0$, т. е., перенося начало координат, и деля все ур-ие на v, найдем, что,

$$\frac{u}{v}\ \frac{y_0}{x_0}\ \frac{1}{x}y + \left(\frac{s - uv}{vx_0}\ \frac{1}{x} + \frac{y_0}{v}\ y\right) = 1;$$

принимая же

$$x_0 = \frac{s - uv}{v} \text{ и } y_0 = v, \text{ причем } \frac{u}{v}\ \frac{y_0}{x_0} = \frac{uv}{s - uv},$$

получим ур-ие:

$$k.\frac{1}{x}y + \left(\frac{1}{x} + y\right) = 1, \qquad \text{где } k = \frac{uv}{s - uv}.$$

Нетрудно убедиться, подобно предыдущему, что условие это характеризует собою кривую, напоминающую по расположению логарифмику вычитания типа $\frac{1}{x}+y=1$, но с координатами вершины, равными не $X_0=Lg2$ и $Y_0=Lg2$, а определяемыми из ур-ия кривой при подстановке в него $\frac{1}{x}=y=z$, т. е. из ур-ия. $kz^2+2z-1=O$, из которого опять-таки

$$z=\frac{-1+\sqrt{1+k}}{k}=\frac{\sqrt{1+k}-1}{1+k-1}=\frac{1}{\sqrt{1+k}+1} \quad \text{при } k=\frac{su-v}{uv}$$

Если в ур-ии *выбрать* из двух знаков *знак* — , то придется, для надлежащей группировки, ур-ие разделить на y и затем на u и, вводя x_0 и y_0:

$$\frac{v}{u}\frac{x_0}{y_0}x\frac{1}{y}+\left(\frac{x_0}{u}x+\frac{s-uv}{uy_0}\cdot\frac{1}{y}\right)=1,$$

принять:

$$x_0=u \text{ и } y_0=\frac{s-uv}{u}, \text{ причем } \frac{v}{u}\frac{x_0}{y_0}=\frac{uv}{s-uv}$$

После того получится ур-ие, отнесенное к новому началу, имеющее простую, аналогичную ранее рассмотренным, форму:

$$kx\frac{1}{y}+\left(x+\frac{1}{y}\right)=1 \qquad \text{при } k=\frac{uv}{s-uv}$$

Координаты вершины определятся очевидно тою же только-что выведенною формулою для их аргумента: $z=\frac{1}{\sqrt{1+k}+1}$. Если обозначить отрезок, измеряющий координаты вершины кривой относительно ее асимптот в масштабе положит. направления логарифмических отсчетов, через Lgc, то $c=\sqrt{1+k}+1$ и $k=c(c-2)$.

Таким образом для всех рассмотренных логарифмик вырабатывается следующее общее правило нахождения отвечающего задаваемой кривой ур-ия: Прежде всего надлежит проверить симметрию кривой относительно линии равнонаклоненной к обоим осям, что можно исполнить, напр., складывая чертеж по такой оси симметрии и рассматривая на свет совпадение частей кривой. Если совпадение обнаружено, надлежит возможно точнее прочертить асимптоты кривой, параллельные осям, и измерить отрезок, равный координатам вершины кривой относительно этих асимптот, логарифмическим масштабом от отметки 1 в сторону увеличения отсчетов. Пусть, напр., отрезок этот равен Lgc. Затем, подыскав типовую логарифмику вычитания, расположенную одинаковым образом с заданной кривой, выписать ур-ие этой логарифмики, собирая все ее члены в левую часть, кроме оставляемой в правой части $+1$, и дополняя эту левую часть членом в виде произведения переменных, написанных в том виде, в каком они входят в ур-ие типовой логарифмики $\left(\text{т. е. } x, y, \text{ или } \frac{1}{x}, \text{ или } \frac{1}{y}\right)$ с коэффициентом k, равным $c(c-2)$, причем этот коэффициент может получаться и отрицательным. Составленная формула представит собою ур-ие кривой относительно начала в точке пересечения ее асимптот. Чтобы отнести кривую к настоящему началу координат, надо прочесть отметки обоих аргументов логарифмических координат этого пересечения асимптот и разделить на эти отметки соответствующие переменные x и y в ур-ии, после чего остается лишь преобразовать ур-ие в желаемую форму путем чисто алгебраическим.

Поясним применение этого правила примером.

Положим, напр., что по точкам в логарифмической сети получена кривая C, обнаруживающая симметрию относительно равнонаклонной к осям прямой AB (Фиг. 12). Построив асимптоты AM и AN, определяем координаты их точки пересечения A равными $Lg\ 12$ и $Lg\ 0{,}6$ (по подписям на сети) и отрезок, измеряющий координаты вершины H кривой по логарифмическому масштабу, находим равным $Lg\ 3$; след. $c=3$. Кривая по расположению напоминает логарифмику вычитания типа $\frac{1}{x}+y=1$. Поэтому, ур-ие кривой (в аргументах логарифмов) относительно точки A пишем так: $k\frac{1}{x}y+\frac{1}{x}+y=1$. Зная c, находим k: $k=c(c-2)=3(3-2)=3$. Наконец, отнесем кривую к настоящему началу координат O, введя при x и при y делителями $x_0=12$ и $y_0=0{,}6$. Получим ур-ие:

$$3\,\frac{12}{0{,}6}\,\frac{y}{x}+\frac{12}{x}+\frac{y}{0{,}6}=1,$$

которое алгебраическими действиями приводится к виду

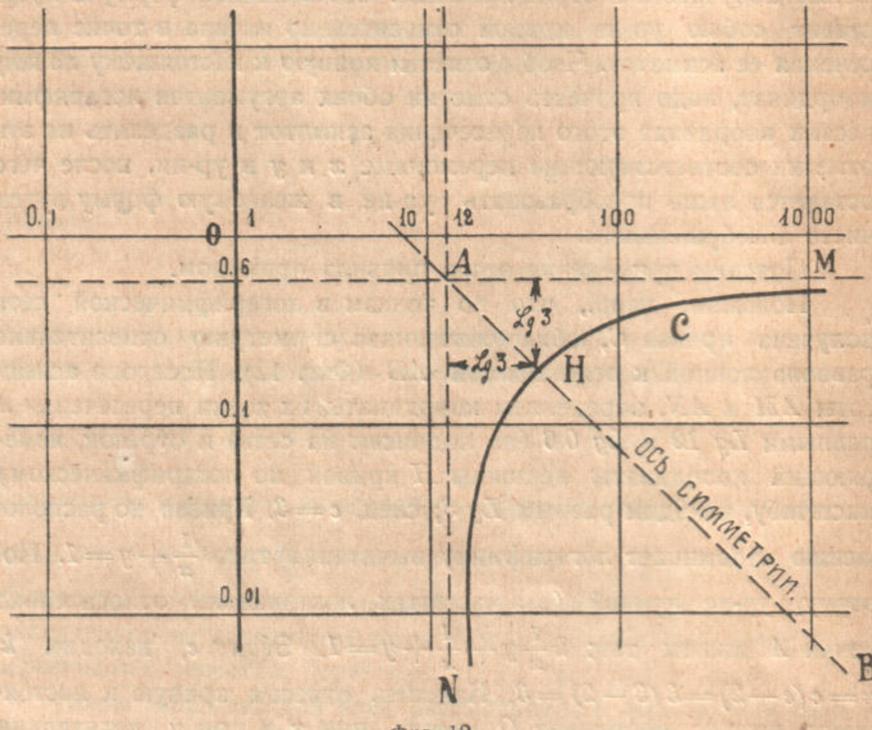
$$5xy-3x+180y+36=0$$

или просто к выражению для y:

$$y=\frac{3(x-12)}{5(x+36)}$$

В той или другой форме написанное выражение и является ур-ем искомой зависимости между x и y, написанной, как видно, сразу между аргументами, т. е. основными переменными x и y, а не между их логарифмами, служащими лишь вспомогательным средством при построении кривой.

Остается еще нерассмотренным случай неодинаковости знаков при x и при y при одинаковости знаков при u и v и при $s - uv < o$; однако, анализ этого случая несколько отложим до рассмотрения особого вида кривых, к которым этот случай приводит.



Фиг. 12.

Случаи различных знаков перед u и перед v.

Различные знаки перед u и перед v приводят к тому, что произведение uv входит в левую часть начального ур-ия со знаком —, а перенесенное в правую часть дает там сумму $s + uv$, всегда положительную.

Если при этом x и y сопровождаются также разными знаками, то общее ур-ие

$$(\pm x \pm u)\ (\pm y \pm v) = s$$

приводится к виду:

$$-xy \pm (vx + uy) = s + uv$$

Как-бы мы затем ни преобразовывали это ур-ие, разделением его на x, на y или на xy, мы всегда будем получать либо перед членом с произведением переменных, либо перед свободным членом знак — (оба решения легко переходят одно в другое). Вообще, этот вид ур-ия может относиться к расположению кривой во всех 4-х нормальных ее позициях. Полагая, напр., в приведенном только-что примере c равным не 3, а лишь $1{,}5$, мы получили бы $k = 1{,}5\ (1{,}5 - 2) = -\ 0{,}75$, и окончательное ур-ие привели бы к виду: $-\ xy + 0{,}6x + 9y = 7{,}2$ или $y = \frac{0{,}6\ \ (x - 12)}{x - 9}$. Но также, взяв кривую в верхнем правом квадранте с координатами точки A пересечения асимптот, равными $Lg3$ и $Lg8$ и с $c = 1{,}5$, т. е. $k = -\ 0{,}75$, нашли бы окончательное ур-ие того же типа $-\ xy + 8x + 3y = 18$ или $y = \frac{2\ (4x - 9)}{x - 3}$. Мало того, для каждого из случаев получается сразу по 2 кривых в на-крест-лежащих квадрантах. В самом деле: Заметим прежде всего, что в основном ур-ии знак — из двух знаков $\pm$ должен быть вообще выброшен, как непригодный, так как иначе сумма положительных величин должна была бы равняться отрицательному количеству — $(s + uv)$. При положительном же знаке из числа двух написанных основное ур-ие дает:

$$y = \frac{(s + uv) - vx}{u - x} = v\,\frac{\left(u + \frac{s}{v}\right) - x}{u - x} = v\,\frac{x - \left(u + \frac{s}{v}\right)}{x - u}$$

Обращая внимание на то, что $u + \frac{s}{v} > u$, нетрудно притти к заключению, что y получает возможные значения: 1) при $x < u$ и 2) при $x > u + \frac{s}{v}$, что и отвечает двум кривым; промежуточные же значения x приводят к неприемлемым отрицательным величинам для y. Так, в предыдущих примерах, в одном: $y = 0{,}6\,\frac{x - 12}{x - 9} = 0{,}6\,\frac{12 - x}{9 - x}$ . . . . . . кривая существует при $x > 12$ и при $x < 9$; в другом: $y = 2\ \frac{4x - 9}{x - 3} = 8\ \frac{x - 2{,}25}{x - 3} =$ $= 8\ \frac{2{,}25 - x}{3 - x}$ . . . . кривая существует при $x > 3$ и $x < 2{,}25$.

Нас, однако, не должна особенно смущать такая двойственность решения, а равно допустимость для кривой любой из 4 позиций, так как, решая практически задачу с обратной стороны, мы всегда кривую имеем уже заданной и в то же время общее правило решения, изложенное выше, остается в полной силе; оно будет лишь сопровождаться в таких случаях получением отрицательных значений для k, что не меняет существа дела. Поэтому, мы можем не входить в дальнейший анализ условий существования каждого из возможных случаев этой категории.

Остановимся теперь над случаями *одинаковых знаков перед* x и *перед* y, сохраняя различие в знаках перед u и v. При этом основное ур-ие приобретает вид:

$$xy \mp (vx - uy) = s + uv$$

Пользуясь приемом, применявшимся нами выше, т. е. перенося начало координат в точку (Lgx_0, Lgy_0), введем в ур-ие количества x_0 и y_0

$$x_0 y_0 xy \mp (vx_0 x - uy_0 y) = s + uv$$

или:

$$\frac{x_0 y_0}{s+uv} xy \mp \left(\frac{vx_0}{s+uv} x - \frac{uy_0}{s+uv} y\right) = 1$$

Чтобы упростить ур-ие, подобно тому, как это делалось в предыдущих случаях, надо будет выбрать

$$x_0 = \frac{s+uv}{v} \text{ и } y_0 = \frac{s+uv}{u}, \text{ причем } \frac{x_0 y_0}{s+uv} = \frac{s+uv}{uv},$$

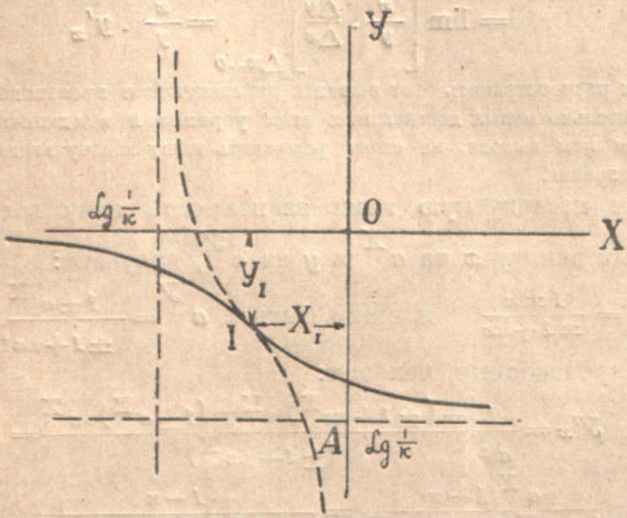
и ур-ие после того примет вид:

$$kxy \mp (x - y) = 1 \qquad \text{при } k = \frac{s+uv}{uv}$$

Рассматривая эту формулу, замечаем, что x и y, в отношении знаков, входят в нее несимметрично; производя же преобразования, можно было бы убедиться, что и введением вместо x или y обратных им величин нельзя достичь полной симметрии. Об'ясняется это тем, что кривая вообще не принадлежит к категории только-что рассмотренных. Можно сразу же убедиться, по составленному ур-ию, решая его относительно x или y:

$$x = \frac{1 \mp y}{\mp 1 + ky} \text{ или } y = \frac{1 \pm x}{\pm 1 + kx},$$

что при верхних знаках кривая существует лишь в пределах значений y от 1 до $\frac{1}{k}$ (т. е. $У$ от $Lg1 = 0$ до $Lg\frac{1}{k} = -Lgk$), характеризуясь при этих предельных значениях величинами x, равными 0 и ∞, т. е. располагаясь в указанной полосе значений y ветвью, асимптотически касающейся оси X, и прямой $X = Lg\frac{1}{k}$, ей параллельной, как показывает сплошная кривая на фиг. 13; при нижних же знаках кривая занимает такое же положение в полосе значений x от $X = Lgx = Lg1 = 0$ до $X = Lgx = Lg\frac{1}{k} = -Lgk$, как показывает пунктирная кривая линия на том же чертеже. При таком начертании кривая должна обладать точкою перегиба 1; найдем координаты этой точки. Точка перегиба характеризуется переходом углового коэффициента касательной, т. е. первой производной одной координаты кривой по другой координате, с уменьшения на увеличение или обратно, чему должно отвечать равенство нулю второй производной тех же координат одной по другой. При этом, надо лишь иметь в виду, что кривая вычерчена в координатах логарифмических и что ее начертание в геометрическом смысле определяется не зависимостью, составляемою между количествами x и y, а ур-ем в координатах $X = Lgx$ и $Y = Lgy$. Поэтому, перепишем ранее найденную нами зависимость, вводя в нее $x = a^X$ и $y = a^Y$.



Фиг. 13.

Можно было бы поступить и иначе, преобразовав предварительно общую формулу для вычисления производных таким образом, чтобы эти производные можно было исчислять непосредственно по аргументам логарифмов. Действительно нетрудно убедиться, что:

$$y'_x = \lim\left[\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right]_{\Delta X \ldots o} = \lim\left[\frac{Lg(y+\Delta y) - Lgy}{Lg(x+\Delta x) - Lgx}\right]_{\Delta x \ldots o} =$$

$$= \lim\left[\frac{Lg\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)}{Lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}\right]_{\Delta X \ldots o} = \lim\left\{\frac{\frac{\Delta y}{y} Lg\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)^{\frac{y}{\Delta y}}}{\frac{\Delta x}{x} Lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}\right\}_{\Delta X \ldots o} =$$

$$= \lim\left[\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{\Delta x \ldots o} = \frac{x}{y} \cdot y'_x$$

Можно затем распространить этот вывод и на следующие производные. Однако ввиду сравнительно малых достигаемых этим упрощений и единичности такого требующегося нам вывода, не стоит усложнять нашу задачу введением новых общих точек зрения.

Решая исследуемую нами зависимость относительно y затем вводя замену x на a^X и y на a^Y, получаем:

$$y = \frac{1 \pm x}{\pm 1 + \kappa x} \quad \text{и стало быть} \quad a^Y = \frac{1 \pm a^X}{\pm 1 + \kappa a^X}.$$

Исчисляя производные, находим:

$$Y'_x = \frac{1}{a^Y} \frac{\pm(\pm 1 + \kappa a^X)a^X - (1 \pm a^X)\kappa a^X}{(\pm 1 + \kappa a^X)^2} =$$

$$\frac{a^X(1-\kappa)}{(1 \pm a^X)(\pm 1 + \kappa a^X)} = \frac{1-\kappa}{\pm a^{-X} + (\kappa + 1) \pm \kappa a^X}$$

$$Y''_{x^2} = -(1-k)\frac{\mp a^{-X} \pm \kappa a^X}{[\pm a^{-X} + (\kappa+1) \pm \kappa a^X]^2}$$

Приравнивая вторую производную нулю, выводим условие:

$$ka^X = a^{-X}, \text{ т. е. } kx = \frac{1}{x},$$

из которого получаем:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \text{ и след. } y = \frac{1 \pm x}{\pm 1 + \kappa x} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \text{ тоже.}$$

Эти найденные значения x и y и являются аргументами логарифмических координат точки 1 перегиба кривых; однозначность ответа указывает на общность этой точки перегиба для обоих кривых.

Естественно попробовать перенести в эту точку 1 начало координат. Для этого придется в ур-ие ввести при x и y множители x_0 и y_0, равные вычисленным только-что значениям x и y для точки 1. Ур-ие обратится в такое:

$$k\ x_0\ y_0\ xy \mp (x_0\ x - y_0\ y) = 1;$$

при $x_0 = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ и $y_0 = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$:

$$xy \mp \frac{1}{\sqrt{\kappa}}(x - y) = 1 \text{ при } k = \frac{s + u\ v}{u\ v}$$

Такая форма (с коэффициентом при произведении переменных равным 1, с численно одинаковыми коэффициентами при отдельно входящих переменных и с 1 во второй части) могла бы придаваться и ранее исследованным ур-м, что отвечало бы выбору начала координат на кривой, в ее вершинной или, вообще говоря срединной точке. Однако, повидимому, для предыдущих кривых удобнее принятое ранее их расположение, сохраняющее к тому же геометрическую связь с идеями Мемке.

Полученное ур-ие и будем считать типовой формой ур-ия новой категории кривых, которая относится к логарифмикам сложения так же, как только-что перед тем изученное видоизменение типовых логарифмик вычитания к этим последним. Можно, пожалуй, эти кривые именовать усложненными логарифмиками сложения и вычитания.

К характеристике формы кривой с перегибом относится еще наклон касательной к ней в точке перегиба. Угловой коэффициент такой касательной определится из выражения первой производной Y'_x при подстановке в нее координат точки перегиба, а именно:

$$\left(Y'_x\right)_{a^x = x = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}} = \frac{a^X(1-k)}{a^Y(\pm 1 + ka^X)^2} = \frac{-\sqrt{k}(1+\sqrt{k})(-1+\sqrt{k})}{\sqrt{k}(\pm 1 + \sqrt{k})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{k} \mp 1}{\sqrt{k} \pm 1}$$

Для геометрического построения кривых необходимо иметь числовую величину k. Примем, соблюдая некоторую аналогию с предыдущими случаями, за нормальное значение $k = 4$, т. е

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa}} = \frac{1}{2}$$

Обратим еще внимание на то свойство полученной категории кривых, что ур-ие их не изменяется при подстановке $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ соответственно вместо x и y. В самом деле: ур-ие

$$\frac{1}{xy} \mp \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 1$$

прямо преобразуется в ур-ие:

$$1 \mp \frac{1}{\sqrt{\kappa}}(y - x) = xy,$$

т. е. в ур-ие:

$$xy \mp \frac{1}{\sqrt{\kappa}}(x - y) = 1.$$

Это указывает, что кривая симметрична относительно начала координат, выбранного в точке перегиба.

Нам остается еще рассмотреть один недоконченный анализом случай, относящийся к групповому условию предыдущего подразделения главы: *u и v с одинаковыми знаками при различии знаков перед x и y* и при $s - uv < o$. Ур-ие, характеризующее этот случай, напишется так:

$$-xy \pm (vx - uy) = -(uv - s)$$

или так:

$$xy \mp (vx - uy) = uv - s \text{ при } uv - s > o.$$

Поступим с ним затем следующим образом: Разделим все члены ур-ия на vx или на uy (что приведет к одинаковому по существу результату), скажем напр. на vx:

$$\frac{1}{v}y \mp 1 \pm \frac{u}{v}\frac{1}{x}y = \frac{uv - s}{v}\frac{1}{x},$$

т. е. $$\pm\frac{u}{v}\frac{1}{x}y - \left(\frac{uv - s}{v}\frac{1}{x} - \frac{1}{v}y\right) = \pm 1$$

или: $$\frac{u}{v}\frac{1}{x}y \mp \left(\frac{uv - s}{v}\frac{1}{x} - \frac{1}{v}y\right) = 1.$$

Полученное ур-ие совершено аналогично ур-ию, только-что приведшему нас к новому типу кривой с перегибом: только оно содержит вместо переменных x и y переменные $\frac{1}{x}$ и y, что приводит его геометрическое изображение к двум кривым, отличающимся от ранее начерченных (на фиг. 13) симметрией относительно оси Y. Нетрудно было бы, перенесением начала по указанному ранее способу, привести и это ур-ие к форме:

$$\frac{1}{x} y \mp \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\left(\frac{1}{x} - y\right) = 1$$

Заметим кстати, что, деля это ур-ие на $\frac{y}{x}$, т. е. умножая его на $\frac{x}{y}$, после простых преобразований получаем его в виде:

$$x \frac{1}{y} \mp \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\left(x - \frac{1}{y}\right) = 1,$$

что обнаруживает опять симметрию кривой относительно начала в точке перегиба и подтверждает вместе с тем идентичность результата, который получился бы при разделении первоначального ур-ия на uy вместо vx.

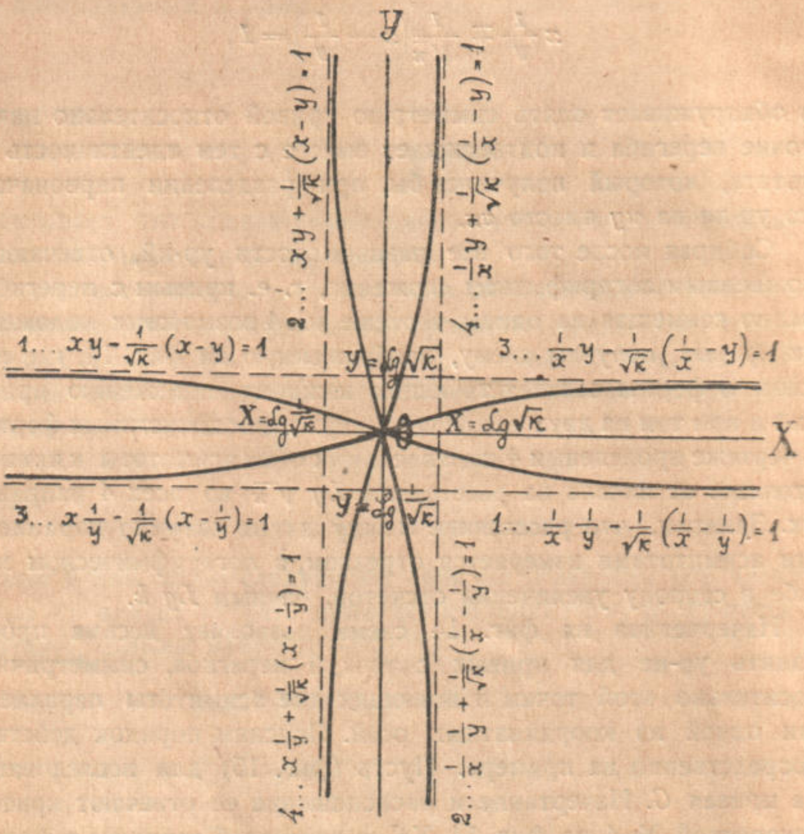
Собирая после того все разновидности ур-ий, отвечающих усложненным логарифмикам сложения, т. е. кривым с перегибом, а равно совмещая на одном чертеже все 4 возможных положения этих кривых, получим схему, изображенную на фиг. 14, где подписаны и формы соответствующих каждому положению кривой ур-ий и при том на двух ея концах в двух равнодопустимых формах. На чертеже проведены 4 параллельных осям асимптоты к кривым, отстоящие от начала на расстоянии $Lg \sqrt{\kappa}$ во всех 4 направлениях. Заметим, что расстояние между двумя взаимно параллельными асимптотами измеряется отрезком, в логарифмическом масштабе в сторону увеличения отсчетов, равным $Lg\ k$.

Начерченная на фиг. 14 схема позволяет весьма просто находить ур-ие для кривых с точкой перегиба, симметричных относительно этой точки и имеющих две асимптоты параллельными одной из координатных осей. Поясним порядок действий непосредственно на примере. Пусть (фиг. 15) для исследования дана кривая C. Начертание и расположение ее отвечают кривой, обозначенной № 4 на фиг. 14. Ур-ие последней запишем в форме:

$$x \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{k}}\left(x - \frac{1}{y}\right) = 1$$

Для данного случая $k = 9$, если измерение расстояния между асимптотами к кривой дает в логарифмическом масштабе $Lg 9$. Касательная в точке 1 перегиба, отвечающая выписанному ур-ию, должна иметь наклон, определяемый $tg\alpha = \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1} = \frac{4}{2} = 2$;

положим, что это условие удовлетворено, т. е. что наклон прямой $MN = 2$ к 1, и что поэтому позволительно применить указанное ур-ие. Отнесение кривой к началу O координат требует введения делителями при x и при y аргументов координат точки 1 перегиба кривой $x_0 = 0,1$ и $y_0 = 5$ (отсчитываемых по чертежу кривой).



Фиг. 14.

Следовательно, ур-ие кривой, отнесенное к началу O координат и записанное уже в форме зависимости между основными переменными x и y, а не их логарифмами, имеет вид:

$$\frac{y_0}{x_0}\frac{x}{y}+\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{x}{x_0}-\frac{y_0}{y}\right)=1$$

или после подстановки числовых величин:

$$\frac{5}{0,1}\,\frac{x}{y}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{0,1}-\frac{5}{y}\right)=1$$

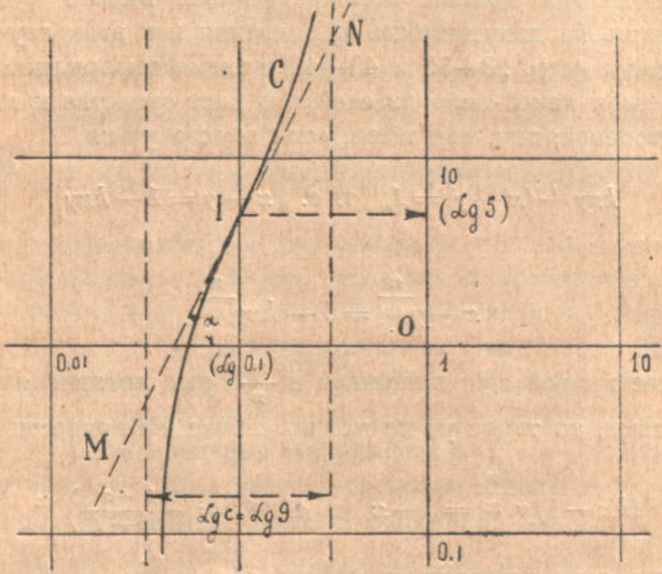
т. е.

$$10\,xy+150\,x-3y-5=0$$

или

$$y=5\,\frac{30\,x-1}{3-10\,x}$$

Ур-ие в той или другой из форм и является требуемым.



Фиг. 15.

Заметим, что симметричность кривых относительно точки перегиба не может быть проверена сложением чертежа и рассматриванием его на свет, но ее можно проверить, прикладывая масштабную линейку средним делением к центру симметрии и наблюдая при различных ее наклонениях одинаковость делений, приходящихся на каждой паре точек пересечения ее ребра с кривой.

Затронув вопрос о кривых с перегибом, заметим попутно, что ур-ие их в обыкновенной системе координат получается заменою x и y в применявшихся нами ур-иях на a^X и a^Y, т. е. имеет вообще вид:

$$a^X a^Y \mp \frac{1}{\sqrt{k}}\left(a^X - a^Y\right)=1 \quad \text{или} \quad \frac{\mp a^X - a^Y}{1-a^X a^Y}=\sqrt{k}$$

Исследование специальных кривых в логарифмической системе координат можно было бы продолжить и далее, систематически усложняя характер изучаемых зависимостей. Однако, это задержало бы нас слишком долго на этом частном вопросе. Надо думать, что в предыдущих изысканиях нами получено достаточное количество сведений и выработаны достаточно определенные приемы, чтобы иметь во многих случаях возможность очень скоро составлять ур-ия основных симметричных кривых, а также— частью и многих кривых несимметричных. Можно разве еще указать лишь на допустимость применения и в этом случае описанного ранее (стр. 28—30 и 40—41) приема деформаций кривых в направлении какой-либо из осей, что даст средство к введению в ур-ие степеней; так, например, если вместо ур-ия

$$kxy + (x - y) = 1, \quad \text{т. е.} \quad x - y = 1 - kxy$$

взять ур-ие

$$x - y^{\frac{n}{m}} = 1 - kxy^{\frac{n}{m}},$$

отвечающее кривой с удлиненными в $\frac{m}{n}$ раз логарифмическими координатами, то такое ур-ие можно сейчас же привести к виду:

$$(kx - 1)y^{\frac{n}{m}} = 1 - x, \quad \text{т. е.} \quad y^n = \left(\frac{1 - x}{kx - 1}\right)^m$$

Стало быть, если исследуемая кривая обнаруживает только пропорциональную деформацию в направлении одной из осей, то имеется все же возможность и для такой кривой составить ур-ие. (Для кривых с перегибом рассмотренного выше типа такая деформация обнаруживается углом наклона касательной в точке перегиба, отличающимся от требуемого ур-ия типовых кривых).

Не углубляясь затем в дальнейшие детали и в дальнейшие усложнения типов, ввиду возможности еще весьма большого их многообразия, предоставим такое развитие изложенной выше теории лицам, которым придется ею пользоваться, тем более, что идея метода вполне уже выяснена приводимыми здесь исследованиями.

Отметим однако в заключение, что исследование вида логарифмик сложения и вычитания может оказаться полезным и при анализе чертежа, построенного не в логарифмическом, а в обыкновенном, равномерном масштабе. Усмотрев в таком чертеже кривую, напоминающую ту или иную форму логарифмики, можно будет произвести ее обследование приведенным выше способом, воображая ее относимою к логарифмическим координатам; в результате же ввести те замены вида и значений переменных, которые вызываются введением временного, вспомогательного, масштаба исчислений.

---

4. Исследование специальных кривых в координатах с логарифмическим масштабом лишь для одной из осей—в полулогарифмической сети.

Полулогарифмическая координатная система отличается от системы логарифмической тем, что одно из координатных направлений, скажем напр. y, сохраняет нормальный равномерный масштаб отсчетов, а логарифмическим масштабом снабжается лишь направление другой координаты, скажем x. Такой закон разделения координат удобен напр. при изучении функций вида: $y = b\ Lgx + c$, равнозначных зависимостям $x^b = y - c$. В частности, в этой системе могут подвергаться исследованию и изучавшиеся нами в логарифмической системе выражения вида:

$$y = Lg\left(x \pm 1\right), y = Lg\left(1 - x\right), y = Lg\left(\frac{1}{x} \pm 1\right), y = Lg\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

и друг. Едва ли, однако, надо специально рассматривать формы геометрических изображений этих ур-ий, так как весь такой анализ можно без труда обосновать на работе, нами уже исполненной. В самом деле, если мы примем, что единица равномерного подразделения масштаба для оси Y, которую мы считаем обыкновенной, нелогарифмической осью, выбрана одинаковой с единицей отложения логарифмов в направлении оси X, считаемой нами сейчас логарифмической, то ничто не препятствует нам мыслить и ось Y имеющей вторичное не нанесенное на чертеж логарифмическое подразделение, т. е. воображать весь чертеж выстраиваемым в полной логарифмической сети. Но в таких условиях мы уже умеем анализировать многие могущие нам встретиться кривыя и составлять их ур-ие непосредственно в виде зависимости между аргументами логарифмов, откладываемых по координатам. Но только в данном случае, полулогарифмической сети, в составляемое ур-ие войдет несуществующая в нашем кругозоре величина y, так как наши действительные ординаты при отложении не подвергаются предварительному логарифмированию. Однако, ничто не препятствует нам логарифмированием полученной формулы ввести в нее, если это конечно оказывается возможным $Lg\, y$, после чего этот $Lg\, y$ и придется лишь всюду, где он входит, заменить y. Особенно удобно это исполнять, если составленная формула уже решена относительно y. Так, если мы возьмем типовую логарифмику с ур-м $y = x - 1$, то логарифмирование этого ур-ия дает $Lgy = Lg\ (x - 1)$, и, стало быть, кривая, аналогичная взятой логарифмике в полулогарифмических координатах с логарифмической осью X и с одинаковостью единиц масштабов обоих осей, изображается ур-м $y = Lg\,(x - 1)$. Возьмем случай посложнее. Положим, что мы имеем в указанной полулогарифмической системе кривую, приведенную выше на фиг. 12 (стр. 50). Анализ ее в логарифмической системе, как было показано, дает ур-ие (в решенном относительно y виде): $y = \frac{3}{5} \frac{(x - 12)}{(x + 36)}$. След., в системе полулогарифмической той же кривой отвечает ур-ие

$$y = Lg\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{x - 12}{x + 36}\right) = Lg\,\frac{x - 12}{x + 36} + Lg\, 0{,}6,$$

т. е.

$$y - Lg\,\frac{5}{3} = y - 0{,}222 = Lg\,\frac{x - 12}{x + 36} \quad \text{или} \quad \frac{x - 12}{x + 36} = 10^{y - 0{,}222.}$$

Кажется, что эти примеры вполне раз'ясняют сущность дела.

Правда, надо заметить, что это сведение анализа кривых в полулогарифмических координатах на анализ тех - же кривых в координатах логарифмических удобно в тех случаях, когда единица масштабного подразделения обыкновенной оси совпадает с единицей подразделения масштаба оси логарифмической: однако, и неодинаковость этих масштабных единиц (что бывает пожалуй чаще) не ставит серьезных препятствий на пути применения метода, так как достаточно лишь ранее анализа кривой графически ее деформировать, приведя к одинаковости обоих масштабов. Во всяком случае, исполняя мысленно эту деформацию хотя бы приближенно, можно уже судить о типе ур-я, отвечающего виду задаваемой кривой.

Несложность такого сведения анализа к случаям, уже изученным,—с одной стороны и даже опасность затемнения методов слишком различными приемами действий—с другой, заставляют ограничить здесь вопрос об исследовании кривых в полулогарифмической системе лишь изложенными соображениями общего характера.

ОГЛАВЛЕНИЕ.